Emparelhamentos em grafos bipartidos com pesos nas arestas

Fábio Botler

Programa de Engenharia de Sistemas e Computação
Universidade Federal do Rio de Janeiro

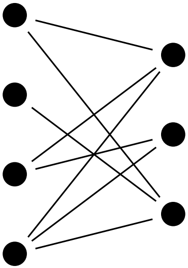
Coberturas

Coberturas

Uma **cobertura** (das arestas por vértices) em um grafo $G = (V, E)$ é um conjunto de vértices $C \subseteq V$ tal que cada aresta de G é incidente a pelo menos um vértice de C.

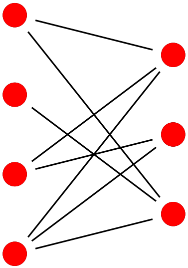
Coberturas

Uma **cobertura** (das arestas por vértices) em um grafo $G = (V, E)$ é um conjunto de vértices $C \subseteq V$ tal que cada aresta de G é incidente a pelo menos um vértice de C.



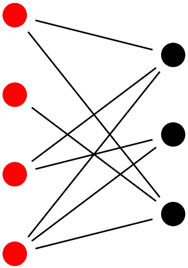
Coberturas

Uma **cobertura** (das arestas por vértices) em um grafo $G = (V, E)$ é um conjunto de vértices $C \subseteq V$ tal que cada aresta de G é incidente a pelo menos um vértice de C.



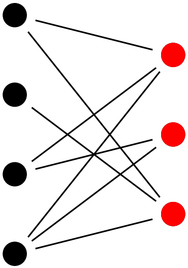
Coberturas

Uma **cobertura** (das arestas por vértices) em um grafo $G = (V, E)$ é um conjunto de vértices $C \subseteq V$ tal que cada aresta de G é incidente a pelo menos um vértice de C.



Coberturas

Uma **cobertura** (das arestas por vértices) em um grafo $G = (V, E)$ é um conjunto de vértices $C \subseteq V$ tal que cada aresta de G é incidente a pelo menos um vértice de C.



Coberturas

Coberturas

O conjunto de todos os vértices de um grafo é sempre uma cobertura.

Coberturas

O conjunto de todos os vértices de um grafo é sempre uma cobertura.

É natural que busquemos uma cobertura com o menor número de vértices.

Coberturas

O conjunto de todos os vértices de um grafo é sempre uma cobertura.

É natural que busquemos uma cobertura com o menor número de vértices.

Uma cobertura C de G é **mínima** se não há cobertura C' de G menor que C.

Coberturas $\times$ Emparelhamentos

Coberturas × Emparelhamentos

Proposição

Seja C e M um emparelhamento em um grafo G. Então $|C| \geq |M|$.

Coberturas $\times$ Emparelhamentos

Proposição

Seja C e M um emparelhamento em um grafo G. Então $|C| \geq |M|$.

Prova.

Coberturas $\times$ Emparelhamentos

Proposição

Seja C e M um emparelhamento em um grafo G. Então $|C| \geq |M|$.

Prova.

Como C é uma cobertura, toda aresta de M precisa conter um elemento de C.

Coberturas × Emparelhamentos

Proposição

Seja C e M um emparelhamento em um grafo G. Então $|C| \geq |M|$.

Prova.
Como C é uma cobertura, toda aresta de M precisa conter um elemento de C.

Marque cada vértice de M que está em C.

Coberturas $\times$ Emparelhamentos

Proposição

Seja C e M um emparelhamento em um grafo G. Então $|C| \geq |M|$.

Prova.

Como C é uma cobertura, toda aresta de M precisa conter um elemento de C.

Marque cada vértice de M que está em C.

Além disso, as arestas de M não possuem nenhum vértice em comum.

Coberturas $\times$ Emparelhamentos

Proposição

Seja C e M um emparelhamento em um grafo G. Então $|C| \geq |M|$.

Prova.

Como C é uma cobertura, toda aresta de M precisa conter um elemento de C.

Marque cada vértice de M que está em C.

Além disso, as arestas de M não possuem nenhum vértice em comum.

Logo, cada vértice de C foi marcado no máximo uma vez.

Coberturas $\times$ Emparelhamentos

Proposição

Seja C e M um emparelhamento em um grafo G. Então $|C| \geq |M|$.

Prova.

Como C é uma cobertura, toda aresta de M precisa conter um elemento de C.

Marque cada vértice de M que está em C.

Além disso, as arestas de M não possuem nenhum vértice em comum.

Logo, cada vértice de C foi marcado no máximo uma vez.

Isso implica que $|C| \geq |M|$. $\square$

Coberturas $\times$ Emparelhamentos

Coberturas $\times$ Emparelhamentos

Teorema (Kőnig)

Seja G um grafo, e sejam C uma cobertura mínima de G e M um emparelhamento máximo de G. Então $|C| = |M|$.

Coberturas $\times$ Emparelhamentos

Teorema (Kőnig)

Seja G um grafo, e sejam C uma cobertura mínima de G e M um emparelhamento máximo de G. Então $|C| = |M|$.

Prova.

Lembre-se que se M é um emparelhamento máximo, então G não possui caminho M-aumentante.

Coberturas $\times$ Emparelhamentos

Teorema (Kőnig)

Seja G um grafo, e sejam C uma cobertura mínima de G e M um emparelhamento máximo de G. Então $|C| = |M|$.

Prova.
Lembre-se que se M é um emparelhamento máximo, então G não possui caminho M-aumentante.

Então todo caminho M-alternante maximal tem comprimento par.

Coberturas $\times$ Emparelhamentos

Teorema (Kőnig)

Seja G um grafo, e sejam C uma cobertura mínima de G e M um emparelhamento máximo de G. Então $|C| = |M|$.

Prova.

Lembre-se que se M é um emparelhamento máximo, então G não possui caminho M-aumentante.

Então todo caminho M-alternante maximal tem comprimento par.

Além disso, um caminho M-alternante iniciado em um vértice M-exposto de A não pode ter interseção com um caminho M-alternante iniciado em um vértice M-exposto de B.

Prova.
Seja C_1 (resp. C_2) o conjunto dos vértices de B (resp. de A) que estão em caminhos M-alternantes iniciados em vértices M-expostos de A (resp. B).
Seja C_3 o conjunto dos vértices de A incidentes a arestas de M que não estão em caminhos M-alternantes iniciados em vértices M-expostos.

Prova.
Seja C_1 (resp. C_2) o conjunto dos vértices de B (resp. de A) que estão em caminhos M-alternantes iniciados em vértices M-expostos de A (resp. B).
Seja C_3 o conjunto dos vértices de A incidentes a arestas de M que não estão em caminhos M-alternantes iniciados em vértices M-expostos.

Note que em $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3$ há exatamente um vértice de cada aresta de M. Logo $|C| = |M|$.

Prova.
Seja C_1 (resp. C_2) o conjunto dos vértices de B (resp. de A) que estão em caminhos M-alternantes iniciados em vértices M-expostos de A (resp. B).
Seja C_3 o conjunto dos vértices de A incidentes a arestas de M que não estão em caminhos M-alternantes iniciados em vértices M-expostos.

Note que em $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3$ há exatamente um vértice de cada aresta de M. Logo $|C| = |M|$.

Afirmamos que C é uma cobertura.
Claramente, toda aresta em M é coberta.

Prova.

Seja C_1 (resp. C_2) o conjunto dos vértices de B (resp. de A) que estão em caminhos M-alternantes iniciados em vértices M-expostos de A (resp. B).
Seja C_3 o conjunto dos vértices de A incidentes a arestas de M que não estão em caminhos M-alternantes iniciados em vértices M-expostos.

Note que em $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3$ há exatamente um vértice de cada aresta de M. Logo $|C| = |M|$.

Afirmamos que C é uma cobertura.
Claramente, toda aresta em M é coberta.

Seja e uma aresta que não está em M.

Prova.
Seja C_1 (resp. C_2) o conjunto dos vértices de B (resp. de A) que estão em caminhos M-alternantes iniciados em vértices M-expostos de A (resp. B).
Seja C_3 o conjunto dos vértices de A incidentes a arestas de M que não estão em caminhos M-alternantes iniciados em vértices M-expostos.

Note que em $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3$ há exatamente um vértice de cada aresta de M. Logo $|C| = |M|$.

Afirmamos que C é uma cobertura.
Claramente, toda aresta em M é coberta.

Seja e uma aresta que não está em M.

Se e não pertence a caminhos M-alternantes iniciados em vértices M-expostos, então e é coberta por um vértice em C_3.

Prova.

Seja C_1 (resp. C_2) o conjunto dos vértices de B (resp. de A) que estão em caminhos M-alternantes iniciados em vértices M-expostos de A (resp. B).

Seja C_3 o conjunto dos vértices de A incidentes a arestas de M que não estão em caminhos M-alternantes iniciados em vértices M-expostos.

Note que em $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3$ há exatamente um vértice de cada aresta de M. Logo $|C| = |M|$.

Afirmamos que C é uma cobertura.
Claramente, toda aresta em M é coberta.

Seja e uma aresta que não está em M.

Se e não pertence a caminhos M-alternantes iniciados em vértices M-expostos, então e é coberta por um vértice em C_3.

Mas se e pertence a um caminho M-alternante iniciado em um vértice M-exposto, então e é coberta por um vértice em C_1 ou em C_2. □

Coberturas e emparelhamentos em grafos com pesos nas arestas

Coberturas e emparelhamentos em grafos com pesos nas arestas

Como generalizar esse problema (e o algoritmo) para grafos com pesos?

Coberturas e emparelhamentos em grafos com pesos nas arestas

Como generalizar esse problema (e o algoritmo) para grafos com pesos?

O que é uma cobertura em um grafo com pesos?

Coberturas e emparelhamentos em grafos com pesos nas arestas

Como generalizar esse problema (e o algoritmo) para grafos com pesos?

O que é uma cobertura em um grafo com pesos?

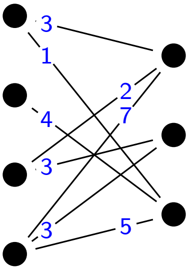
Um grafo com pesos é um par (G, w), onde $G = (V, E)$ é um grafo e $w\colon E \to \mathbb{Z}$ é uma função **pesos nas arestas** de G.

Coberturas e emparelhamentos em grafos com pesos nas arestas

Como generalizar esse problema (e o algoritmo) para grafos com pesos?

O que é uma cobertura em um grafo com pesos?

Um grafo com pesos é um par (G, w), onde $G = (V, E)$ é um grafo e $w\colon E \to \mathbb{Z}$ é uma função **pesos nas arestas** de G.



Coberturas e emparelhamentos em grafos com pesos nas arestas

Coberturas e emparelhamentos em grafos com pesos nas arestas

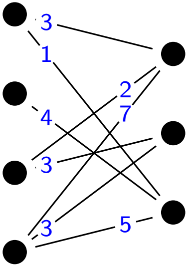
Uma cobertura c de G é uma função $c\colon V \to \mathbb{Z}$ tal que

$$c(x) + c(y) \geq w(xy)$$

Coberturas e emparelhamentos em grafos com pesos nas arestas

Uma cobertura c de G é uma função $c\colon V \to \mathbb{Z}$ tal que

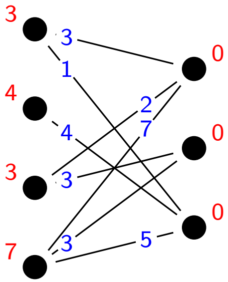
$$c(x) + c(y) \geq w(xy)$$



Coberturas e emparelhamentos em grafos com pesos nas arestas

Uma cobertura c de G é uma função $c\colon V \to \mathbb{Z}$ tal que

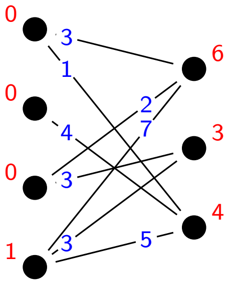
$$c(x) + c(y) \geq w(xy)$$



Coberturas e emparelhamentos em grafos com pesos nas arestas

Uma cobertura c de G é uma função $c\colon V \to \mathbb{Z}$ tal que

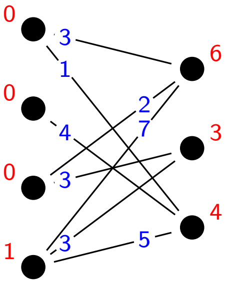
$$c(x) + c(y) \geq w(xy)$$



Coberturas e emparelhamentos em grafos com pesos nas arestas

Uma cobertura c de G é uma função $c\colon V \to \mathbb{Z}$ tal que

$$c(x) + c(y) \geq w(xy)$$



o **custo** de uma cobertura é o valor total de seus custos, i.e., $|c| = \sum_{x \in V} c(x)$.

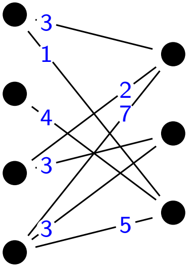
Coberturas $\times$ Emparelhamentos

Coberturas × Emparelhamentos

O **peso** de um emparelhamento M é $w(M) = \sum_{e \in M} w(e)$.

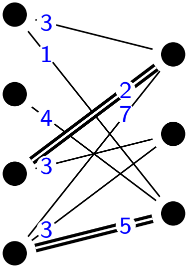
Coberturas × Emparelhamentos

O **peso** de um emparelhamento M é $w(M) = \sum_{e \in M} w(e)$.



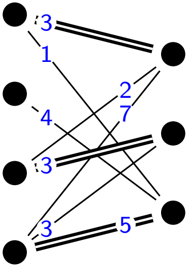
Coberturas × Emparelhamentos

O **peso** de um emparelhamento M é $w(M) = \sum_{e \in M} w(e)$.



Coberturas × Emparelhamentos

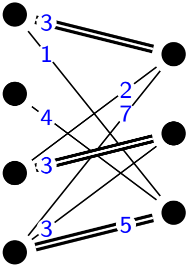
O **peso** de um emparelhamento M é $w(M) = \sum_{e \in M} w(e)$.



Coberturas × Emparelhamentos

O **peso** de um emparelhamento M é $w(M) = \sum_{e \in M} w(e)$.

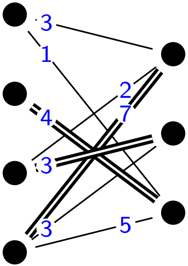
Um emparelhamento M em G é dito **máximo**, se para todo emparelhamento M' de G temos $w(M') \leq w(M)$.



Coberturas × Emparelhamentos

O **peso** de um emparelhamento M é $w(M) = \sum_{e \in M} w(e)$.

Um emparelhamento M em G é dito **máximo**, se para todo emparelhamento M' de G temos $w(M') \leq w(M)$.



Coberturas $\times$ Emparelhamentos

Coberturas $\times$ Emparelhamentos

Qual a relação entre uma cobertura e um emparelhamento?

Coberturas $\times$ Emparelhamentos

Qual a relação entre uma cobertura e um emparelhamento?

Proposição

Se c é uma cobertura e M é um emparelhamento em um grafo G, então $|c| \geq w(M)$.

Coberturas × Emparelhamentos

Qual a relação entre uma cobertura e um emparelhamento?

Proposição

Se c é uma cobertura e M é um emparelhamento em um grafo G, então $|c| \geq w(M)$.

Prova.

Coberturas × Emparelhamentos

Qual a relação entre uma cobertura e um emparelhamento?

Proposição

Se c é uma cobertura e M é um emparelhamento em um grafo G, então $|c| \geq w(M)$.

Prova.

$$|c| = \sum_{x \in V} c(x) \geq \sum_{x \text{ é } M\text{-saturado}} c(x)$$
$$= \sum_{xy \in M} (c(x) + c(y)) \geq \sum_{e \in M} w(e) = w(M)$$

Coberturas × Emparelhamentos

Qual a relação entre uma cobertura e um emparelhamento?

Proposição

Se c é uma cobertura e M é um emparelhamento em um grafo G, então $|c| \geq w(M)$.

Prova.

$$
\begin{aligned}
|c| = \sum_{x \in V} c(x) &\geq \sum_{x \text{ é } M\text{-saturado}} c(x) \\
&= \sum_{xy \in M} (c(x) + c(y)) \geq \sum_{e \in M} w(e) = w(M)
\end{aligned}
$$

Obs: Se $|c| = w(M)$, então c é uma cobertura mínima e M é um emparelhamento máximo.

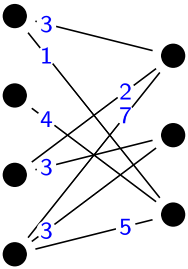
Coberturas $\times$ Emparelhamentos

Coberturas $\times$ Emparelhamentos

Obs: Se $|c| = w(M)$, então c é uma cobertura mínima e M é um emparelhamento máximo.

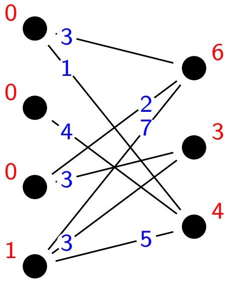
Coberturas × Emparelhamentos

Obs: Se $|c| = w(M)$, então c é uma cobertura mínima e M é um emparelhamento máximo.



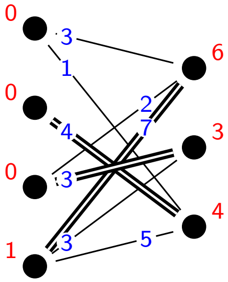
Coberturas × Emparelhamentos

Obs: Se $|c| = w(M)$, então c é uma cobertura mínima e M é um emparelhamento máximo.



Coberturas × Emparelhamentos

Obs: Se $|c| = w(M)$, então c é uma cobertura mínima e M é um emparelhamento máximo.



Coberturas $\times$ Emparelhamentos

Coberturas $\times$ Emparelhamentos

Para cada aresta $xy \in E$, chamamos o valor $c(x) + c(y) - w(xy)$ de **excesso** de xy na cobertura c.

Coberturas $\times$ Emparelhamentos

Para cada aresta $xy \in E$, chamamos o valor $c(x) + c(y) - w(xy)$ de **excesso** de xy na cobertura c.

Note que o excesso de uma aresta é sempre maior ou igual a 0 porque c é uma cobertura.

Coberturas × Emparelhamentos

Para cada aresta $xy \in E$, chamamos o valor $c(x) + c(y) - w(xy)$ de **excesso** de xy na cobertura c.

Note que o excesso de uma aresta é sempre maior ou igual a 0 porque c é uma cobertura.

Proposição

Se c é uma cobertura e M é um emparelhamento perfeito em um grafo G, e todas as arestas de M tem excesso igual a 0, então c é uma cobertura mínima e M é um emparelhamento máximo.

Coberturas × Emparelhamentos

Para cada aresta $xy \in E$, chamamos o valor $c(x) + c(y) - w(xy)$ de **excesso** de xy na cobertura c.

Note que o excesso de uma aresta é sempre maior ou igual a 0 porque c é uma cobertura.

Proposição

Se c é uma cobertura e M é um emparelhamento perfeito em um grafo G, e todas as arestas de M tem excesso igual a 0, então c é uma cobertura mínima e M é um emparelhamento máximo.

Prova.

Coberturas × Emparelhamentos

Para cada aresta $xy \in E$, chamamos o valor $c(x) + c(y) - w(xy)$ de **excesso** de xy na cobertura c.

Note que o excesso de uma aresta é sempre maior ou igual a 0 porque c é uma cobertura.

Proposição

Se c é uma cobertura e M é um emparelhamento perfeito em um grafo G, e todas as arestas de M tem excesso igual a 0, então c é uma cobertura mínima e M é um emparelhamento máximo.

Prova.

$$|c| = \sum_{x \in V} c(x) = \sum_{x \text{ é } M\text{-saturado}} c(x)$$
$$= \sum_{xy \in M} \big(c(x) + c(y)\big) = \sum_{e \in M} w(e) = w(M)$$

Coberturas × Emparelhamentos

Para cada aresta $xy \in E$, chamamos o valor $c(x) + c(y) - w(xy)$ de **excesso** de xy na cobertura c.

Note que o excesso de uma aresta é sempre maior ou igual a 0 porque c é uma cobertura.

Proposição

Se c é uma cobertura e M é um emparelhamento perfeito em um grafo G, e todas as arestas de M tem excesso igual a 0, então c é uma cobertura mínima e M é um emparelhamento máximo.

Prova.

$$
\begin{aligned}
|c| = \sum_{x \in V} c(x) &= \sum_{x \text{ é } M\text{-saturado}} c(x) \\
&= \sum_{xy \in M} \big(c(x) + c(y)\big) = \sum_{e \in M} w(e) = w(M)
\end{aligned}
$$

Coberturas $\times$ Emparelhamentos

Coberturas × Emparelhamentos

Mas então temos que encontrar emparelhamento perfeito?

Coberturas × Emparelhamentos

Mas então temos que encontrar emparelhamento perfeito?

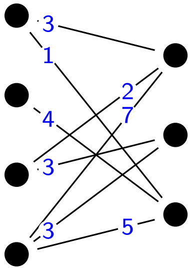
Mas nem todo grafo possui emparelhamento perfeito!

Coberturas × Emparelhamentos

Mas então temos que encontrar emparelhamento perfeito?

Mas nem todo grafo possui emparelhamento perfeito!

Podemos adicionar um vértice extra e as arestas que estão faltando em G com peso 0.

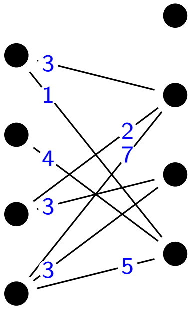


Coberturas × Emparelhamentos

Mas então temos que encontrar emparelhamento perfeito?

Mas nem todo grafo possui emparelhamento perfeito!

Podemos adicionar um vértice extra e as arestas que estão faltando em G com peso 0.

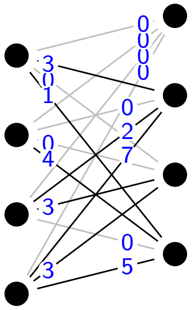


Coberturas × Emparelhamentos

Mas então temos que encontrar emparelhamento perfeito?

Mas nem todo grafo possui emparelhamento perfeito!

Podemos adicionar um vértice extra e as arestas que estão faltando em G com peso 0.

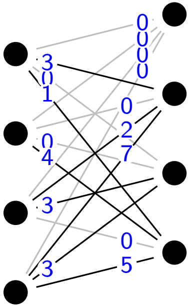


Coberturas × Emparelhamentos

Mas então temos que encontrar emparelhamento perfeito?

Mas nem todo grafo possui emparelhamento perfeito!

Podemos adicionar um vértice extra e as arestas que estão faltando em G com peso 0. Obtendo um novo grafo G'.



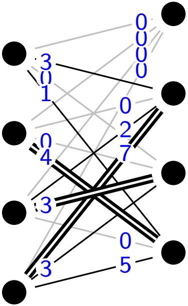
Coberturas × Emparelhamentos

Mas então temos que encontrar emparelhamento perfeito?

Mas nem todo grafo possui emparelhamento perfeito!

Podemos adicionar um vértice extra e as arestas que estão faltando em G com peso 0. Obtendo um novo grafo G'.

O peso do emparelhamento máximo em G' é igual ao peso de um emparelhamento máximo em G.



Coberturas × Emparelhamentos

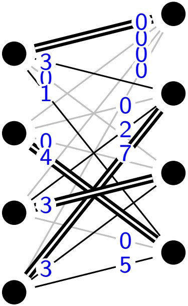
Mas então temos que encontrar emparelhamento perfeito?

Mas nem todo grafo possui emparelhamento perfeito!

Podemos adicionar um vértice extra e as arestas que estão faltando em G com peso 0. Obtendo um novo grafo G'.

O peso do emparelhamento máximo em G' é igual ao peso de um emparelhamento máximo em G.

Mas o emparelhamento máximo em G' é um emparelhamento perfeito!



Coberturas × Emparelhamentos

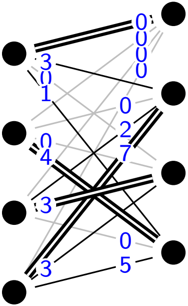
Mas então temos que encontrar emparelhamento perfeito?

Mas nem todo grafo possui emparelhamento perfeito!

Podemos adicionar um vértice extra e as arestas que estão faltando em G com peso 0. Obtendo um novo grafo G'.

O peso do emparelhamento máximo em G' é igual ao peso de um emparelhamento máximo em G.

Mas o emparelhamento máximo em G' é um emparelhamento perfeito!



Isso **reduz** o nosso problema ao problema encontrar um emparelhamento máximo em um grafo bipartido completo!

Subgrafo Zero

Subgrafo Zero

Dada cobertura c, o **subgrafo zero** de G (com respeito a c), denotado por G_0, é o grafo que consiste das arestas de G com excesso 0.

Subgrafo Zero

Dada cobertura c, o **subgrafo zero** de G (com respeito a c), denotado por G_0, é o grafo que consiste das arestas de G com excesso 0.

Pela proposição anterior, se existe um emparelhamento perfeito em G_0, esse emparelhamento é máximo!

Subgrafo Zero

Dada cobertura c, o **subgrafo zero** de G (com respeito a c), denotado por G_0, é o grafo que consiste das arestas de G com excesso 0.

Pela proposição anterior, se existe um emparelhamento perfeito em G_0, esse emparelhamento é máximo!

Vamos construir um algoritmo que inicia com uma cobertura trivial e um emparelhamento vazio,

Subgrafo Zero

Dada cobertura c, o **subgrafo zero** de G (com respeito a c), denotado por G_0, é o grafo que consiste das arestas de G com excesso 0.

Pela proposição anterior, se existe um emparelhamento perfeito em G_0, esse emparelhamento é máximo!

Vamos construir um algoritmo que inicia com uma cobertura trivial e um emparelhamento vazio, e vai refinando essa cobertura e aumentando o emparelhamento usando o grafo zero.

Refinando e aumentando

Refinando e aumentando

Seja M um emp. com o maior número de arestas em G_0.

Refinando e aumentando

Seja M um emp. com o maior número de arestas em G_0.

Se M não é perfeito, há um vértice M-exposto, digamos $v \in A$.

Refinando e aumentando

Seja M um emp. com o maior número de arestas em G_0.

Se M não é perfeito, há um vértice M-exposto, digamos $v \in A$.

Seja G_v o conjunto de todos os vértices de G_0 que podem ser alcançados a partir de v por caminhos M-alternantes (em G_0).

Refinando e aumentando

Seja M um emp. com o maior número de arestas em G_0.

Se M não é perfeito, há um vértice M-exposto, digamos $v \in A$.

Seja G_v o conjunto de todos os vértices de G_0 que podem ser alcançados a partir de v por caminhos M-alternantes (em G_0).

Como v é M-exposto, G_v possui mais vértices em A do que em B, pois cada vértice em B está emparelhado a um vértice em A.

Refinando e aumentando

Seja M um emp. com o maior número de arestas em G_0.

Se M não é perfeito, há um vértice M-exposto, digamos $v \in A$.

Seja G_v o conjunto de todos os vértices de G_0 que podem ser alcançados a partir de v por caminhos M-alternantes (em G_0).

Como v é M-exposto, G_v possui mais vértices em A do que em B, pois cada vértice em B está emparelhado a um vértice em A.

Seja e a aresta que possui o **menor excesso**, digamos ε, dentre as arestas que ligam $V(G_v) \cap A$ a vértices em $B \setminus V(G_v)$.

Refinando e aumentando

Seja M um emp. com o maior número de arestas em G_0.

Se M não é perfeito, há um vértice M-exposto, digamos $v \in A$.

Seja G_v o conjunto de todos os vértices de G_0 que podem ser alcançados a partir de v por caminhos M-alternantes (em G_0).

Como v é M-exposto, G_v possui mais vértices em A do que em B, pois cada vértice em B está emparelhado a um vértice em A.

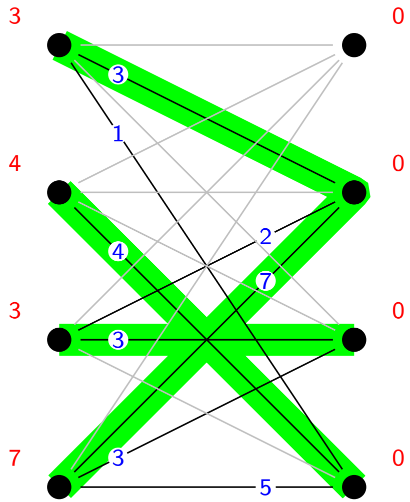
Seja e a aresta que possui o **menor excesso**, digamos ε, dentre as arestas que ligam $V(G_v) \cap A$ a vértices em $B \setminus V(G_v)$.

Atualizamos c da seguinte forma:

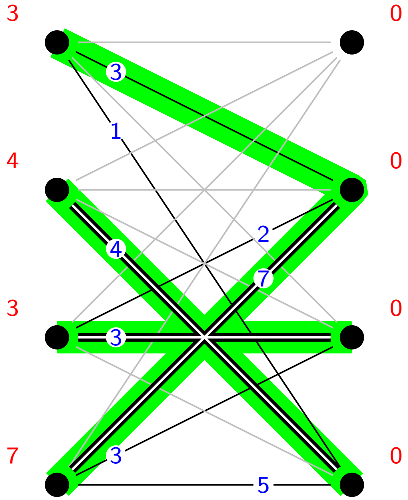
$$c(v) = \begin{cases} c(v) - \varepsilon, & \text{se } v \in A \cap V(G_v) \\ c(v) + \varepsilon, & \text{se } v \in B \cap V(G_v) \\ c(v), & \text{se } v \notin V(G_v) \end{cases}$$

Refinando e aumentando

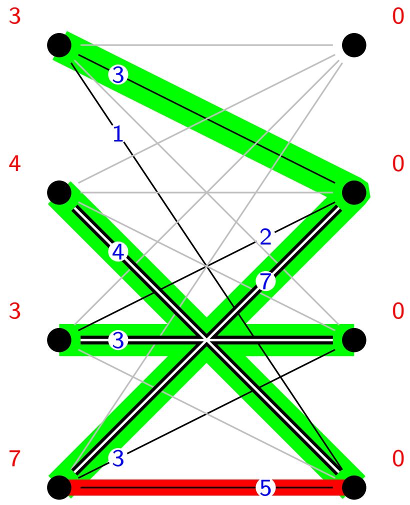
Refinando e aumentando



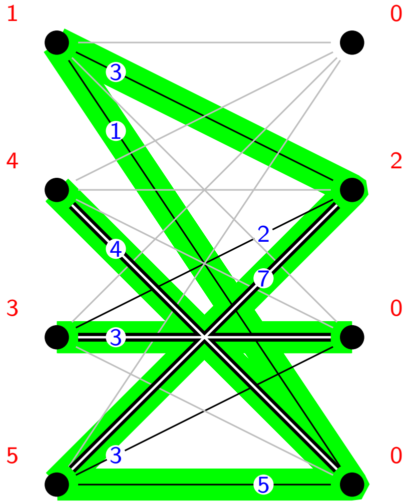
Refinando e aumentando



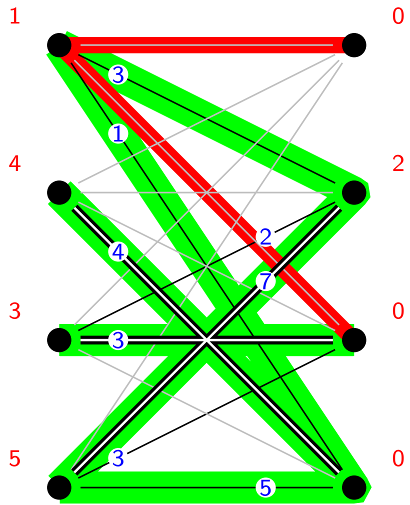
Refinando e aumentando



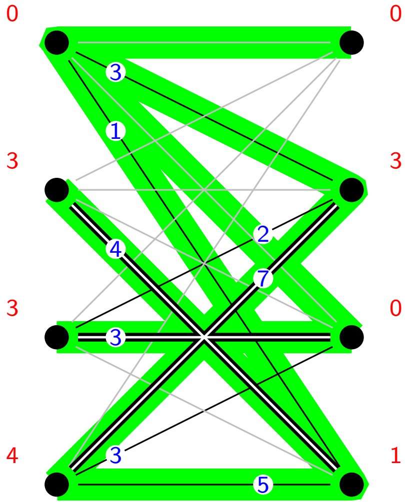
Refinando e aumentando



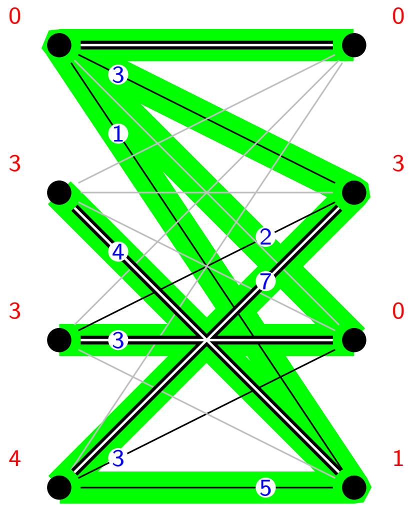
Refinando e aumentando



Refinando e aumentando



Refinando e aumentando



Emparelhamentos em grafos bipartidos com pesos nas arestas

Fábio Botler

Programa de Engenharia de Sistemas e Computação
Universidade Federal do Rio de Janeiro