Grafos – Aula 4

Roteiro

- Percorrendo grafos
- Algoritmo genérico
- BFS
- Camadas
- Árvore geradora
- Caminhos mínimos

Percorrendo Grafos

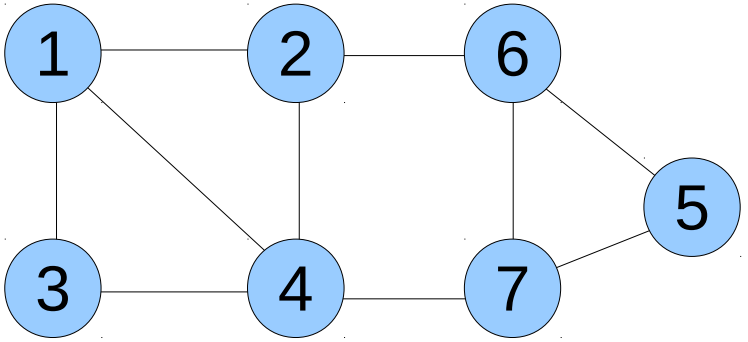
Como *explorar* um grafo de forma sistemática?

Explorar = “passear pelo grafo”, “percorrer o grafo”

- Explorar para encontrar → buscar
- Muitas aplicações recaem em problemas de busca em grafos
- Muitos algoritmos utilizam fundamentos similares ao de busca

Exemplo

- Determinar se existe caminho entre dois vértices?



$$A := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Algoritmo (eficiente)?

Algoritmo de Busca

- **Idéia**: evitar revisitar vértices já explorados
  - marcar os vértices
- Marcações: *desconhecido*, *descoberto* ou *explorado*
  - *Desconhecido*: vértice ainda não foi descoberto pelo algoritmo
  - *Descoberto*: vértice foi encontrado (visitado pelo algoritmo)
  - *Explorado*: todos vizinhos do vértice foram descobertos (todas as arestas incidentes ao vértice foram analisadas)

Algoritmo Genérico

- Passo inicial
  - marcar todos os vértices como *desconhecidos*
  - selecionar origem e marcá-la *descoberto*
- Passo geral
  - Enquanto houver vértice descoberto
    - Selecionar algum vértice descoberto, u
    - Se u possuir vizinho desconhecido, v
      - marcar v como *descoberto*
    - Senão, marcar u como *explorado*

O que teremos ao final?

- vértices desconhecidos e vértices explorados

Ordenação da Exploração

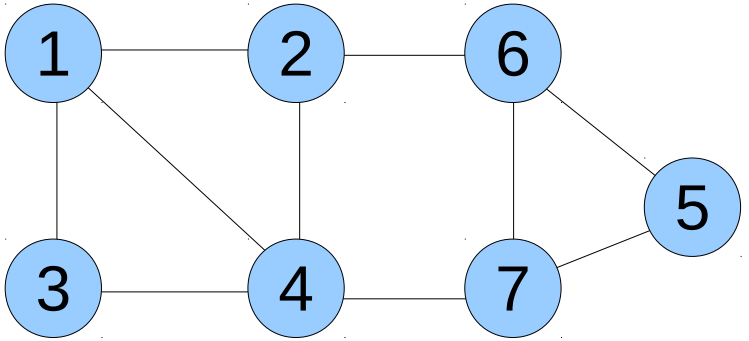
- Qual vértice u (descoberto) deve ser escolhido para ser analizado?

Algoritmo genérico não estabelece ordem

- Ordenação define uma sistemática de exploração
- Duas abordagens
  - u é o vértice *descoberto* “mais antigo”
  - u é o vértice *descoberto* “mais recente”

Busca em Largura (BFS)

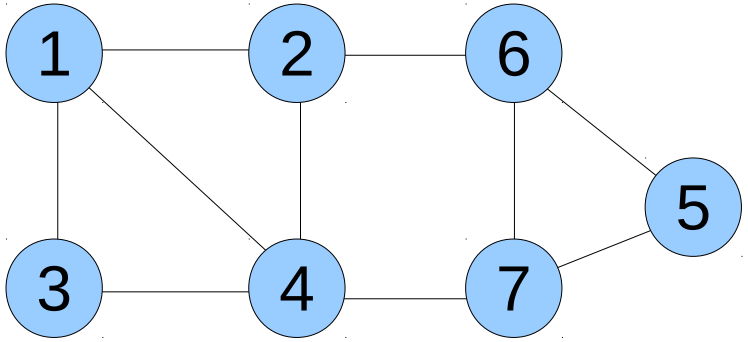
- Analisar vértices descobertos mais antigos primeiro



- Origem: vértice 1
- Em que ordem os vértices são *descobertos*?

Assumir que vizinhos são descobertos em ordem crescente de seus identificadores

Exemplo

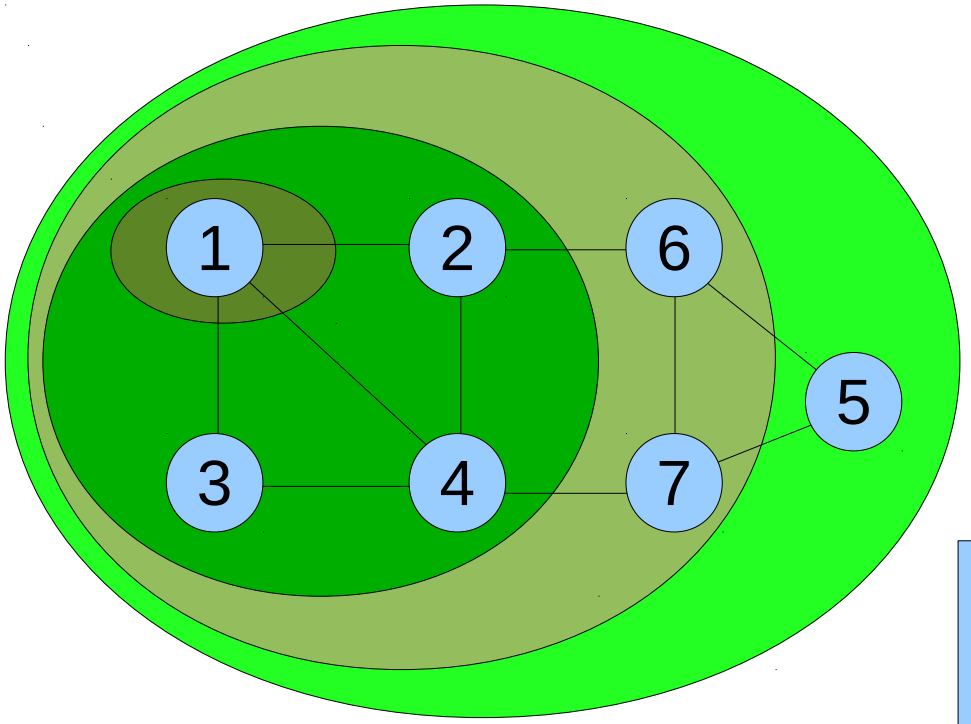


- Iniciar com vértice 1
- Analisar mais antigo primeiro
- Ordem que vértices são adicionados no conjunto descoberto
- 1,2,3,4,6,7,5

Passo	Descoberto	Explorado	Desconhecido
0	1	-	2,3,4,5,6,7
1	1,2	-	3,4,5,6,7
2	1,2,3	-	4,5,6,7
3	1,2,3,4	-	5,6,7
4	2,3,4	1	5,6,7
5	2,3,4,6	1	5,7
6	3,4,6	1,2	5,7
7	4,6	1,2,3	5,7
8	4,6,7	1,2,3	5
9	6,7	1,2,3,4	5
10	6,7,5	1,2,3,4	-
11	7,5	1,2,3,4,6	-
12	5	1,2,3,4,6,7	-
13	-	1,2,3,4,6,7,5	-

Interpretação

- Onda é propagada à partir da raiz
- Onda expande em círculos, descobrindo vértices vizinhos dos vizinhos...



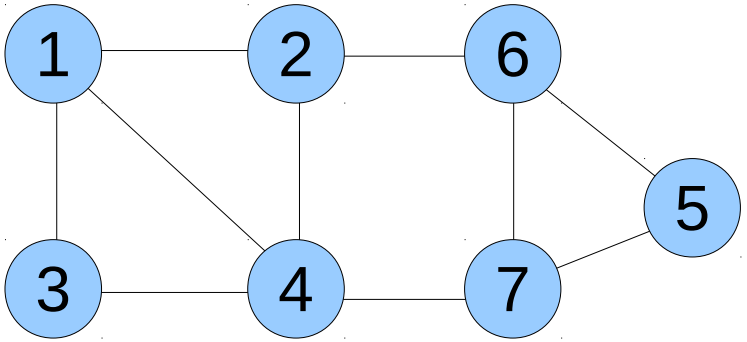
Busca em Largura!

Camadas

- L_i : conjunto de vértices pertencentes a camada i=0, 1, 2, ...

- L_0 : vértice origem
- L_{i+1} : conjunto de vértices que **não fazem parte** de uma camada anterior e que **possuem uma aresta** com algum vértice da camada L_i

Camadas: Exemplo



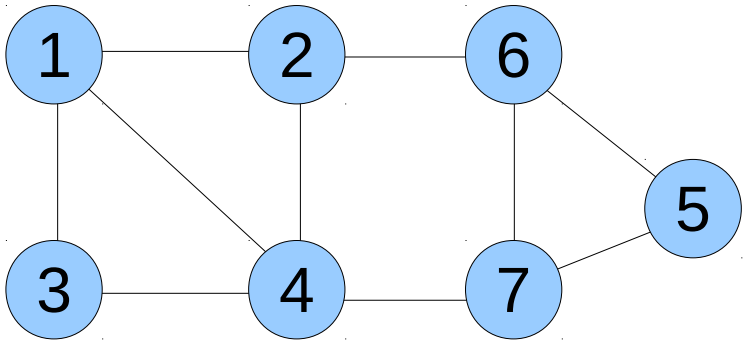
- L_0 : vértice 2 → L_0 : 2
- L_i : ? → L_1 : 1, 4, 6

L_2 : 3, 5, 7

L_3 : vazia

Distância

- Comprimento do **menor** caminho simples entre dois vértices
- Função d(u,v), onde u e v são vértices
  - infinito quando não há caminho



- Exemplo
  - d(1,2) =?
  - d(6, 3) = ?
  - d(7, 1) = ?

Camadas e Distância

- Qual é a relação entre camadas e distância?

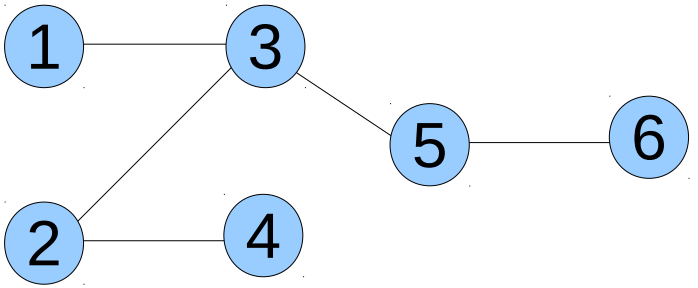
- Vértices pertencentes a camada L_i têm distância i da origem!

Busca em largura (BFS) calcula distância!

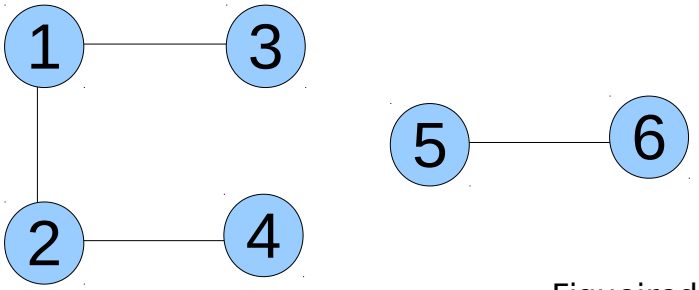
Grafo Acíclico

- Grafo acíclico é um grafo que não possui ciclos
  - lembram do “ciclo”?
- Exemplo:
  - K_4 é acíclico?

É acíclico?

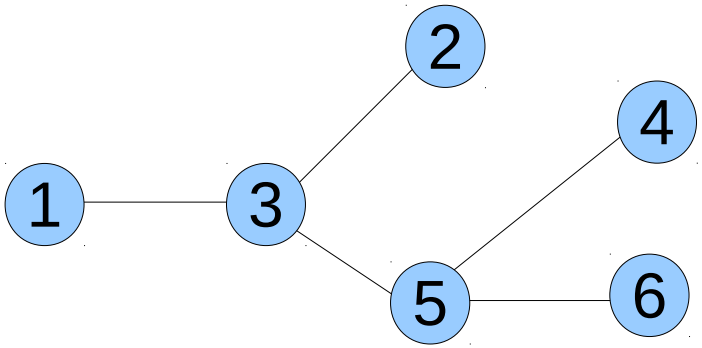


É acíclico?



Árvores

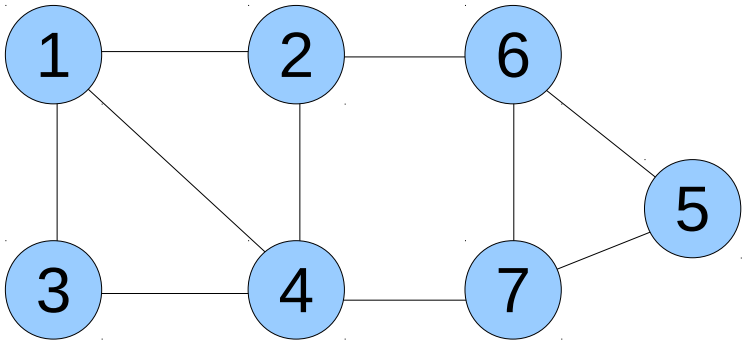
- Uma árvore é um grafo acíclico conexo
  - definição de árvore!



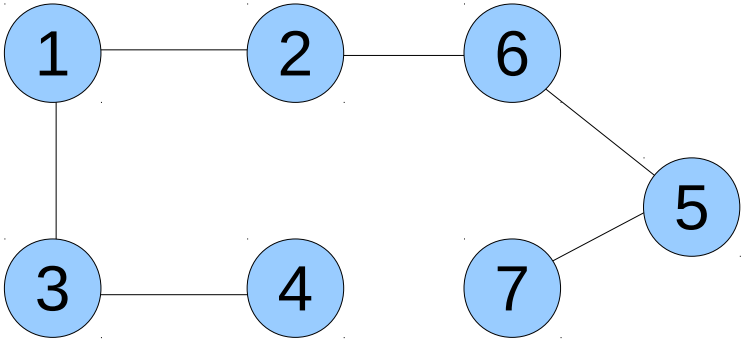
- Folha: vértice com grau 1
- Raiz: um determinado vértice
  - define orientação na árvore (pai, filhos, descendentes e acenstrais)
- Quantos caminhos (simples) existem entre dois vértices de uma árvore?
- Quantas arestas possui uma árvore com *n* vértices?

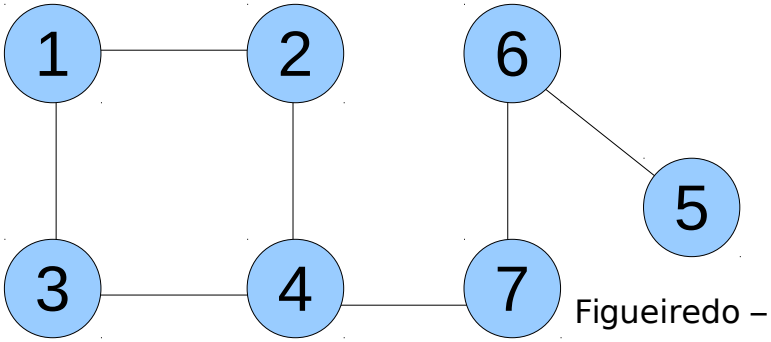
Árvore Geradora

- Subgrafo que contém **todos** os vértices de G e é uma **árvore**
  - em inglês, “spanning tree”
  - árvore que “alcança” todos os vértices



É árvore geradora?

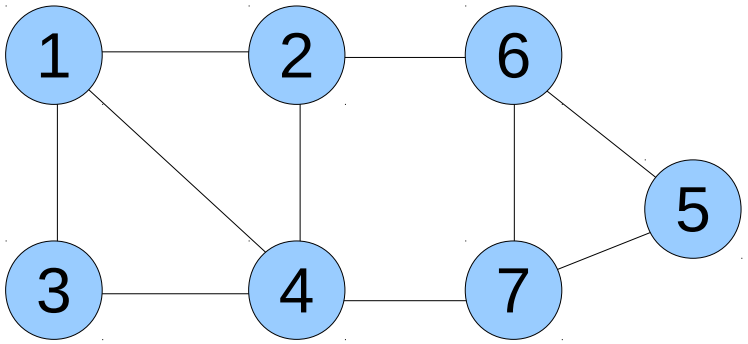




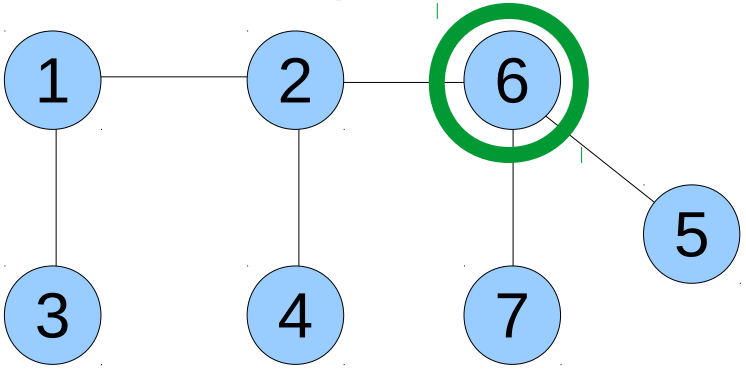
Árvore Geradora da BFS

- Árvore *induzida* pela busca em largura
  - Raiz: vértice de origem
  - Pai de v: vértice que descobriu v

raiz: nó 6



Árvore geradora

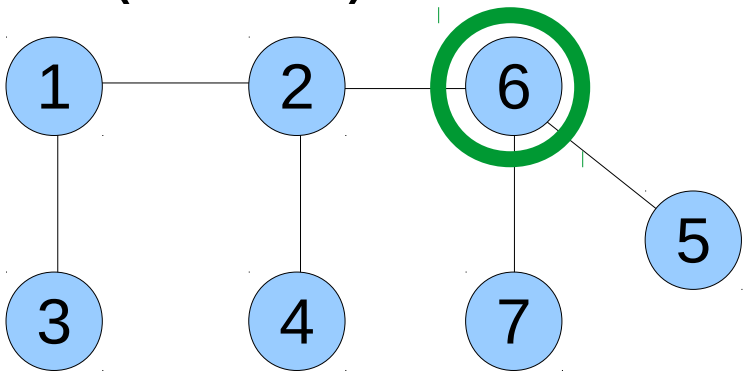


- Ordem da busca *define* árvore
- Conjunto L_i = vértices no nível *i* da árvore

Menor Caminho

- Árvore geradora define menor caminho
- Dado vértice v (raiz) e outro vértice w qq.
  - menor caminho definido pela sequência de pais de w até a raiz

Árvore geradora (raiz 6)



- menor caminho entre 3 e 6?
- menor caminho entre 3 e 7?
- **Cuidado!** Árvore define menor caminho para raiz!

Poderosa BFS

- Determina se existe caminho entre dois vértices
- Calcula distância entre dois vértices
  - comprimento do menor caminho
- Determina (um) menor caminho entre dois vértices
  - sequência de vértices na árvore geradora
- Mesmo custo para calcular entre dois vértices, ou entre um e **todos os outros**!

Algoritmo na próxima aula!