

Grafos – Aula 6

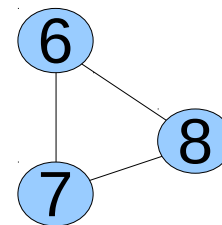
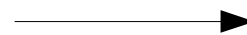
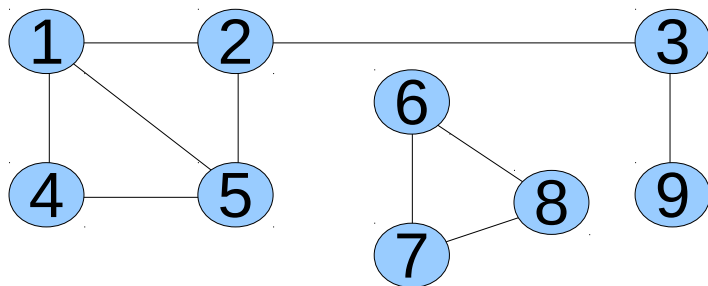
Roteiro

- Componentes conexas
- Grafos direcionados
- Busca em grafos direcionados
- Grafos fortemente conexas

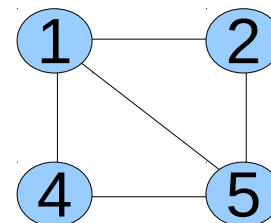
Componentes Conexas

- Maiores subgrafos “conectados” de um grafo
- Subgrafos maximais de G que sejam conexos
 - *maximal*: maior subconjunto que possui a propriedade, no caso subgrafo conexo

■ Exemplo:



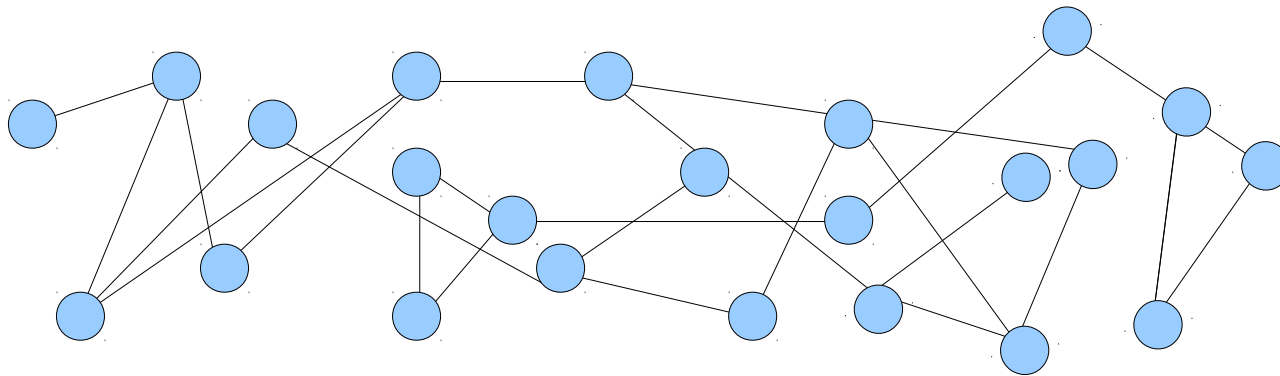
Componente
conexa?



Componente
conexa?

Componentes Conexas

- **Problema:** Determinar o número de componentes conexas de um grafo
 - e tamanho de cada componente



Algoritmo eficiente para resolver este problema?

Componentes Conexas

Usar Busca em Grafos (BFS ou DFS)

- Desmarcar todos os vértices
- Escolher vértice s qualquer
- Realizar BFS(s)
- Vértices marcados determinam uma CC
- Escolher vértice s qualquer não marcado
- Realizar BFS(s)
- Vértices marcados determinam outra CC
- ...

Componentes Conexas

Complexidade?

- Maior número de CC de um grafo?
 - n = número de vértices
- Custo para percorrer cada CC?
 - tamanho da CC (em arestas e vértices)
- Usar marcações diferentes para cada CC
 - permite identificar as diferentes CC ao final
- Escolher vértice não marcado de forma eficiente
 - lista de vértices não marcados, atualizada

$$O(m + n)$$

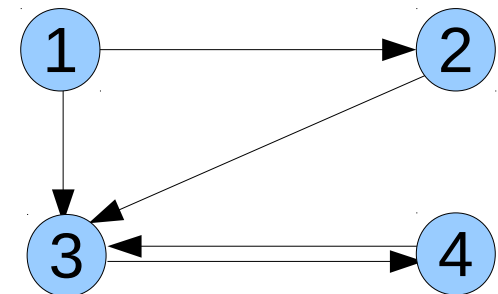
Grafo Direcionado (Dígrafo)

- Relacionamento não é simétrico!
 - A estar relacionado com B, **não** implica B estar relacionado com A
 - Exemplo de relacionamento assimétrico?
- Abstração: arestas têm “direção”
 - par de vértices é ordenado
 - aresta aponta na ordem definida pelo par

■ Exemplo: $G = (V, E)$

■ $V = \{1, 2, 3, 4\}$

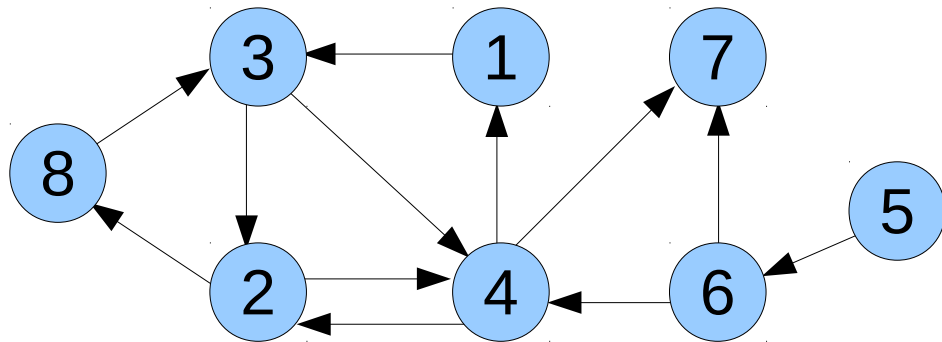
■ $E = \{(1,2), (1,3), (2,3), (3,4), (4,3)\}$



Grau

- Grau de entrada: número de arestas que “entram” em v : $|\{(*,v)\}|$
- Grau de saída: número de arestas que “saem” de v : $|\{(v,*)\}|$

- Exemplo: $G = (V, E)$



- $g_e(3) = ?$

- $g_s(3) = ?$

- $g_e(4) = ?$

- $g_s(7) = ?$

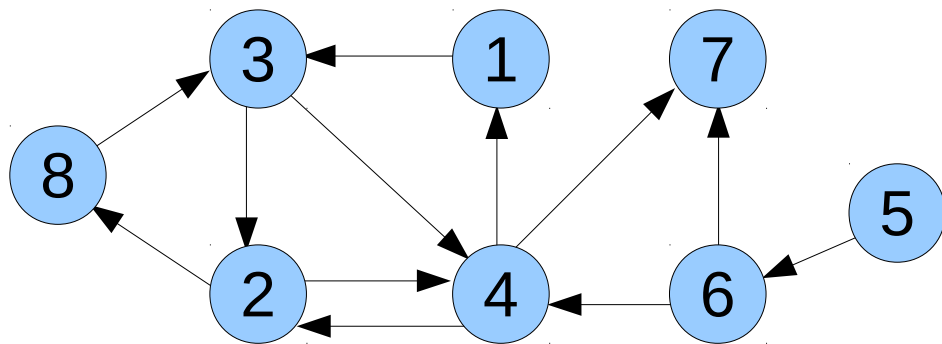
- Número máximo de arestas em G ? ← $n(n-1)$

- Relação entre $g_e(v)$ e $g_s(v)$? ← Nenhuma

Caminho, Ciclo, Distância

- Mesma definição de antes!
- Respeitando o direcionamento das arestas

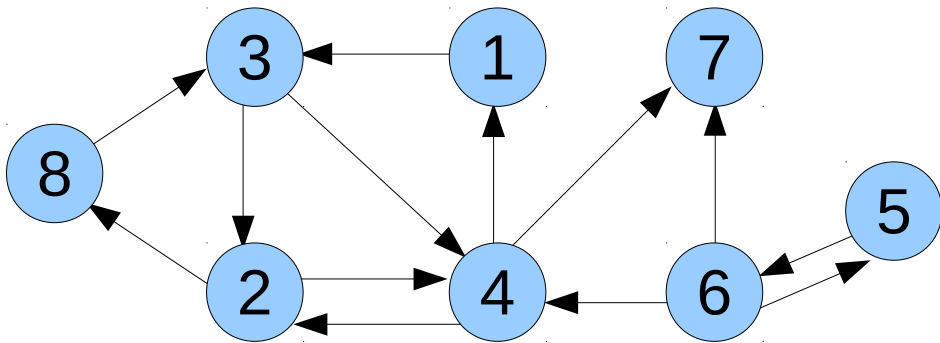
■ Exemplo: $G = (V, E)$



- Existe caminho de 5 para 2?
- Existe caminho de 8 para 6?
- Ciclo que contém 1?
- $d(1,8) = ?$
- $d(8,1) = ?$

Fortemente Conexo

- Análogo a conexo (no caso não direcionado)
- Existe caminho entre qualquer par de vértices
 - repare que caminho de u para v , **não** implica caminho de v para u
- Exemplo: $G = (V, E)$

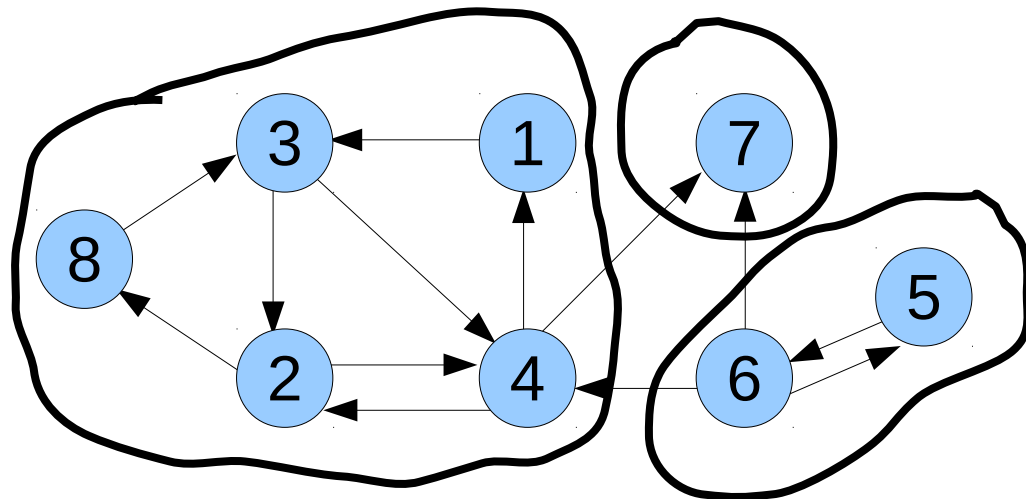


- É fortemente conexo?

Componentes Fortemente Conexas

- Análogo a componentes conexas
- Subgrafos maximais de G que são fortemente conexos

- Exemplo: $G = (V, E)$



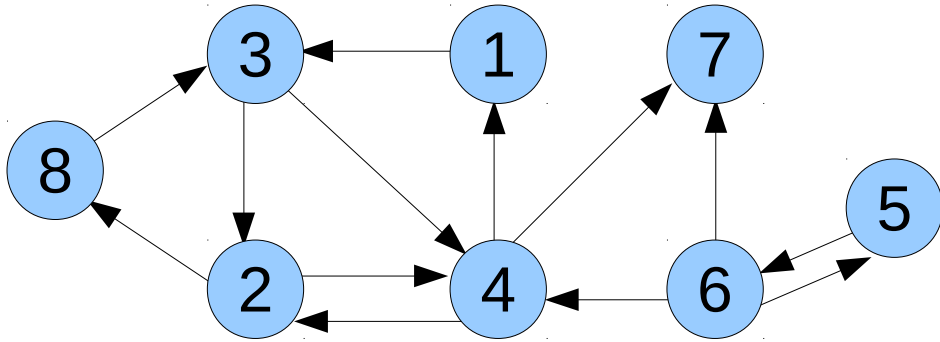
- Componentes fortemente conexas?

Busca em Grafos Direcionados

Mesma idéia!

- Busca precisa respeitar direcionamento das arestas
 - (u, v) não é igual a (v, u)
- BFS e DFS idênticas (respeitando direcionamento das arestas)
- Mesmos algoritmos, mesma complexidade

Exemplo



- BFS a partir do vértice 1
 - Ordem de descobrimento: 1,3,2,4,8,7
- DFS a partir do vértice 8
 - Ordem de descobrimento: 8,3,2,4,1,7

Busca em Grafos Direcionados

- Escolher vértice s (grafo direcionado)
- Executar BFS à partir de s
- Qual significado dos vértices marcados?

Vértices que s alcança!

- Tais vértices alcançam s ?
 - ou seja, existe caminho de volta a s ?

Não necessariamente!

Busca em Grafos Direcionados

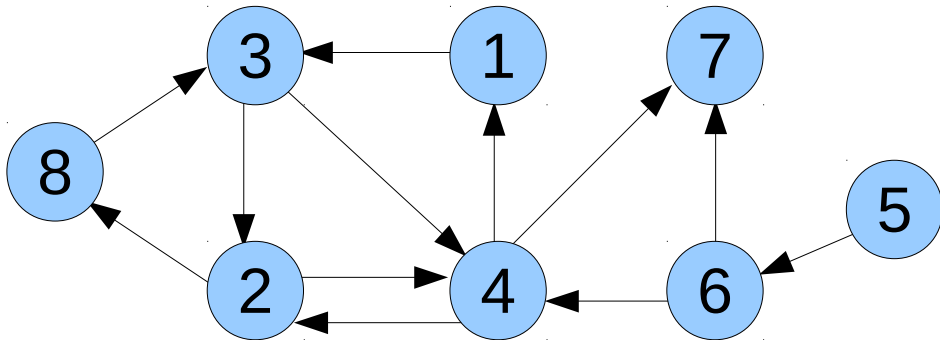
- Como descobrir quais vértices alcançam s ?
- Solução pouco eficiente
 - Para cada vértice do grafo, executar BFS e verificar se s é marcado

Idéias melhores?

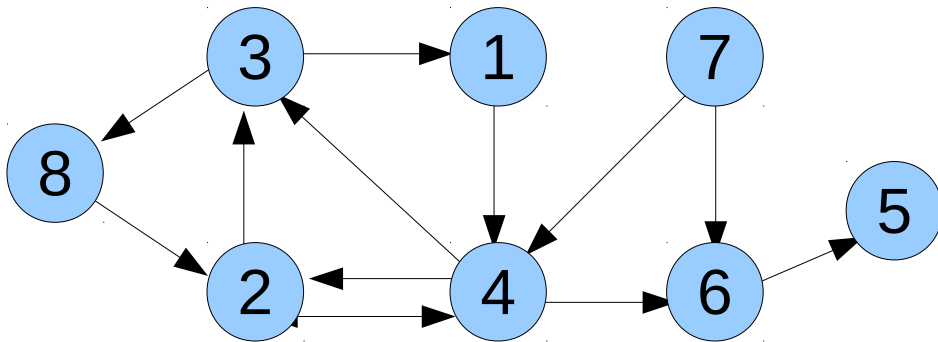
- **Inverter a direção das arestas!**
 - executar BFS no novo grafo à partir de s
 - vértices que s alcançou, alcançam s no grafo original

Exemplo

- Determinar vértices que alcançam 1?



- Grafo com arestas invertidas: G_{rev}



- Executar BFS à partir de 1
- Vértices marcados alcançam 1 no grafo original
- Resultado: 1,4,2,3,6,8,5

Fortemente Conexo

- **Problema:** Como determinar se um grafo direcionado é fortemente conexo?
- Como fizemos no caso não-direcionado?

Idéias?

- Mesmo princípio de antes
 - Se s chega aos vértices u e v , e os vértices u e v chegam a s
 - Então u chega a v , via s

Fortemente Conexo

- **Problema:** Como determinar se um grafo direcionado é fortemente conexo?
- Escolher vértice s qualquer
- Executar BFS à partir de s
- Construir G_{rev}
- Executar BFS à partir de s em G_{rev}
- Se todos os vértices foram marcados nas duas buscas, então G é fortemente conexo

Complexidade?

Complexidade

- Escolher vértice s qualquer ← $O(1)$, escolher vértice 1
- Executar BFS à partir de s ← $O(m + n)$
- Construir G_{rev} ← $O(m + n)$, visitar todos os vértices e arestas
- Executar BFS à partir de s em G_{rev} ← $O(m + n)$
- Se todos os vértices foram marcados nas duas buscas, então G é fortemente conexo ← $O(n)$, percorrer as duas marcações

$O(m + n)$

Componentes Fortemente Conexas

- Como encontrar componentes fortemente conexas?
 - SCC = Strongly Connected Components
- **Ideia 0:** algoritmo anterior identifica a componente fortemente conexa que contém s
 - vértices marcados duas vezes
 - iterar algoritmo sobre vértices não marcados
- Faz duas buscas por cada SCC
- **Ideia 1:** algoritmo de Tarjan
 - baseado na DFS, mantém histórico de conectividade
 - mais eficiente que ideia 0