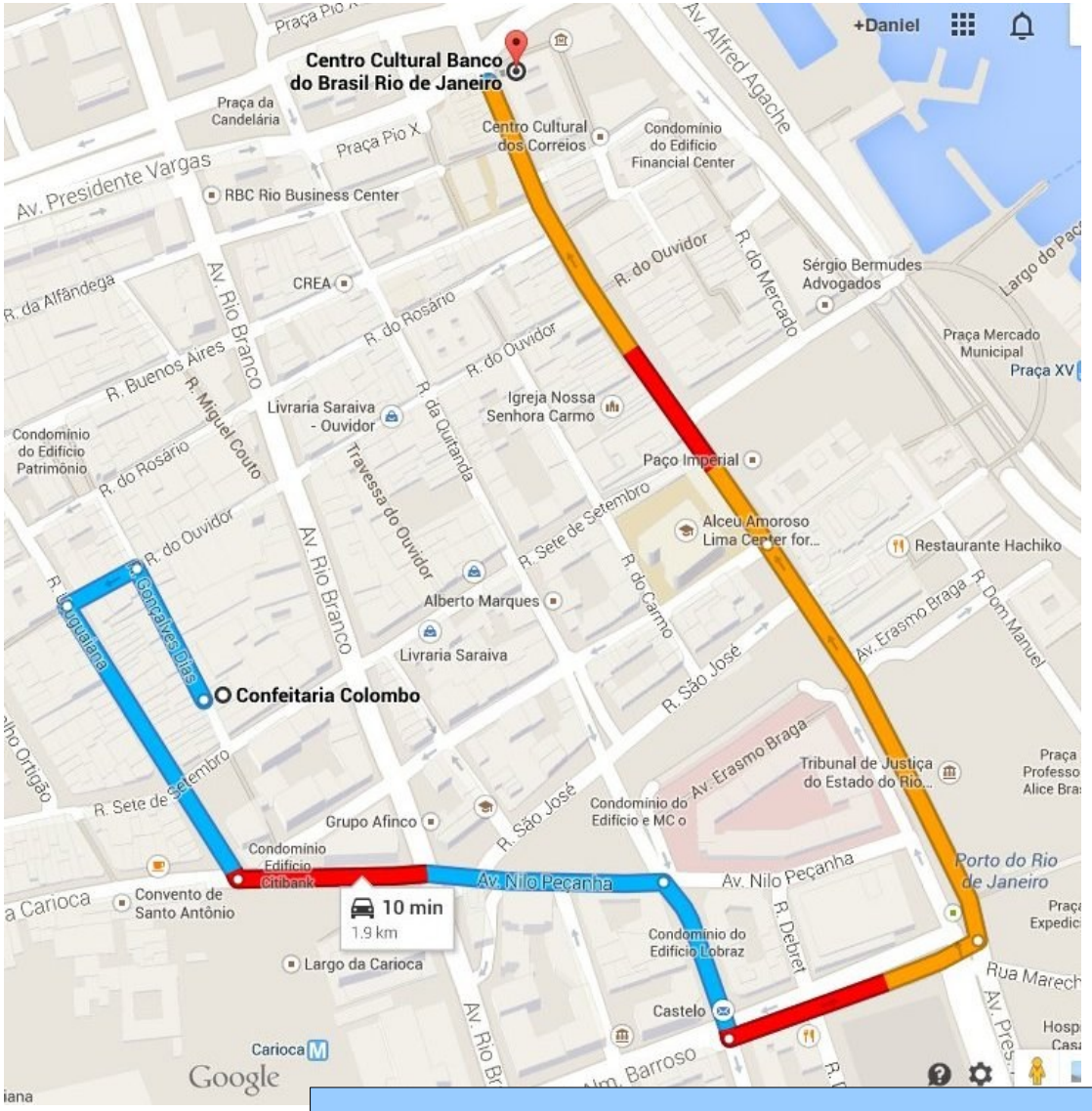
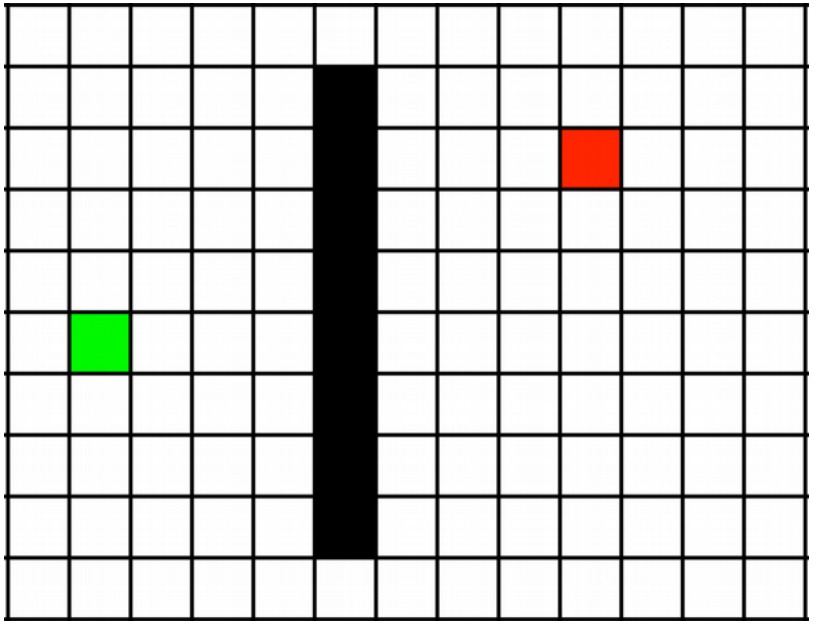
Grafos – Aula 10

Roteiro

- Problema do labirinto (*path finding*)
- Busca informada
- Best-first search
- A*
- Heurística admissível

Problema do Labirinto (*Path finding*)

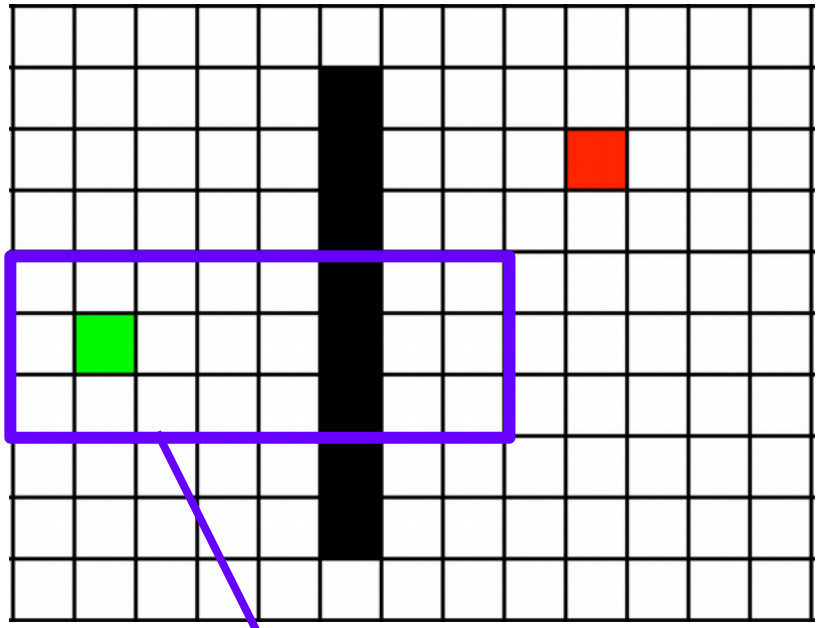




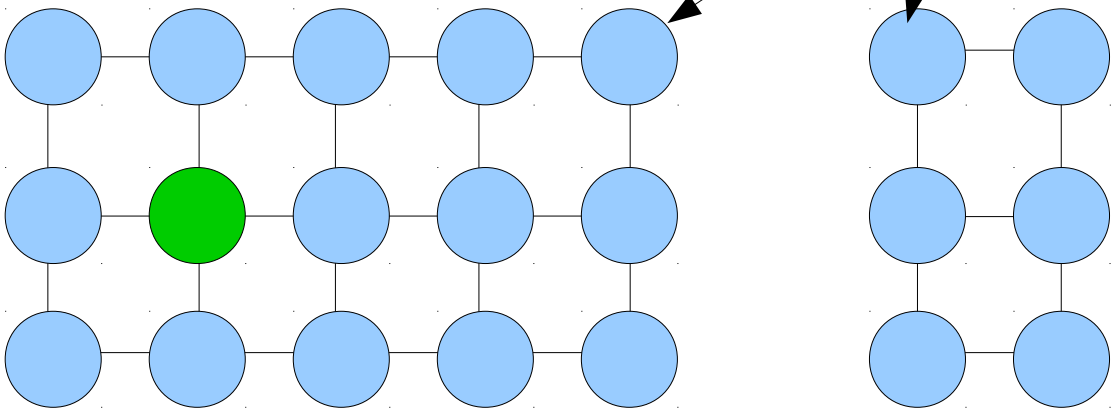
- **Problema:** Encontrar caminho mais curto em um labirinto
- Representação com grafos (direção, pesos)

BFS ou Dijkstra to the rescue!

De Grids para Grafos

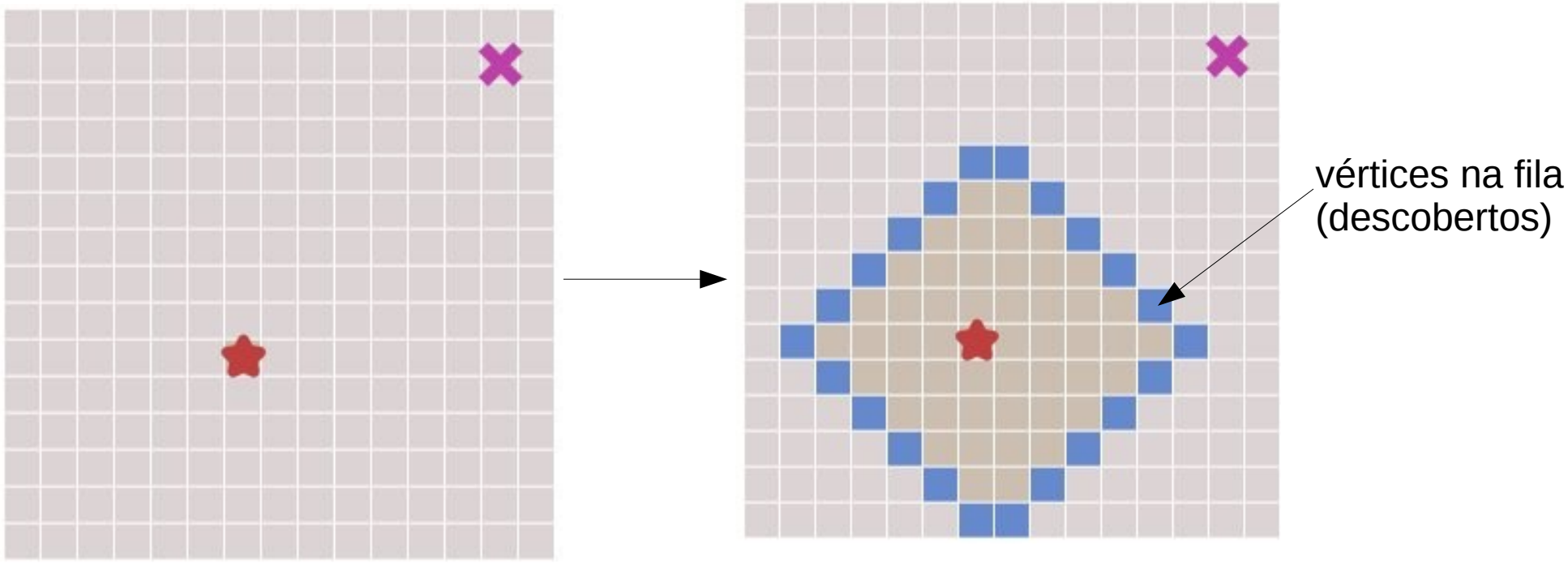


- Cada posição no grid se torna um vértice do grafo
- Arestas entre dois vértices posições são vizinhas



Problema com BFS e Dijkstra

- Expandem em “todas as direções” até encontrar destino
- Exploram muitos vértices desnecessários



Meio ineficiente (na prática)!

Algoritmos Informados

- BFS e Dijsktra são algoritmos de busca *não-informados*
  - não conhecem nada sobre destino

Não podem fazer melhor!

- Em muitos contextos, existe informação sobre o destino da busca

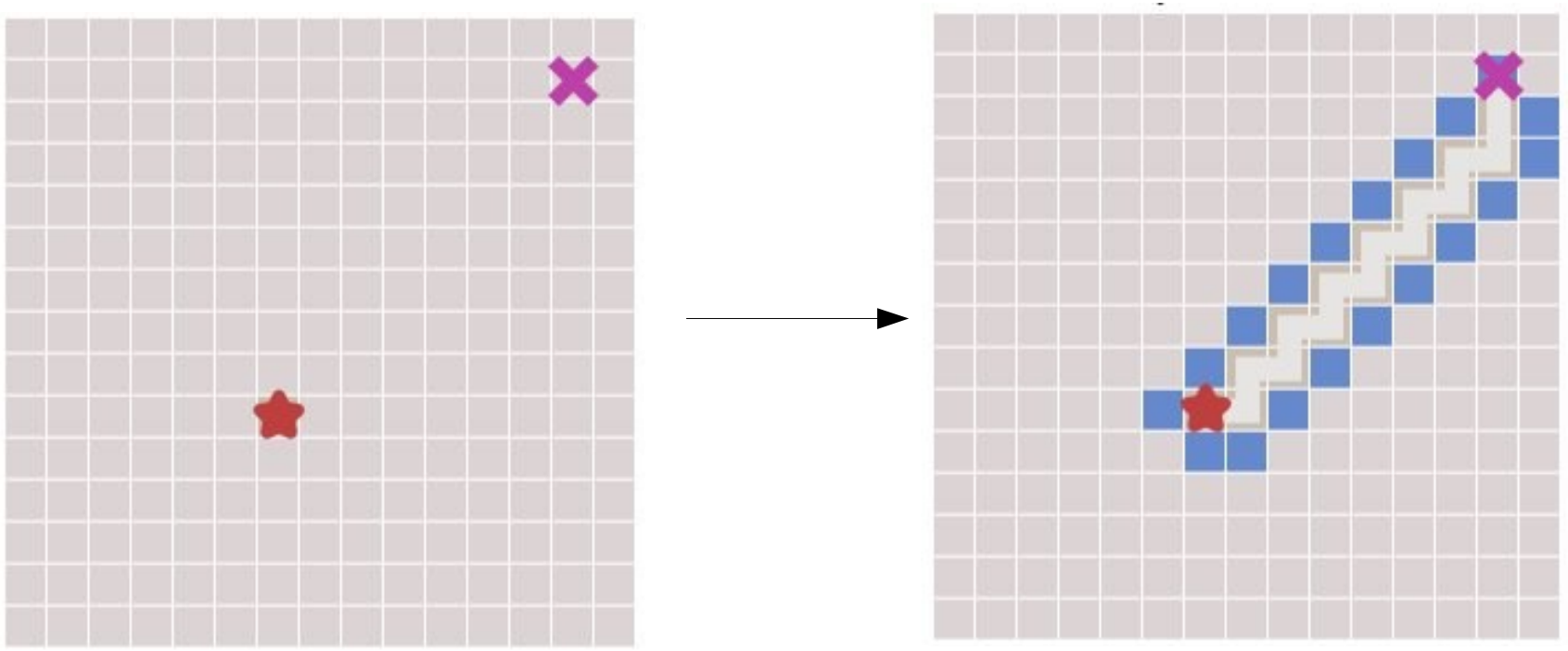
Exemplos? → **Locais em uma cidade: coordenadas (lat., long.)**

- Grafos onde vértices possuem informação
  - que pode facilitar navegação

Como explorar isto?

Exemplo

- Grid em duas dimensões
- Coordenada do vértice está disponível em cada vértice
  - Coordenada do vértice destino é informada
- Algoritmo de busca pode utilizar estas informações



Bem mais eficiente!

Best-first Search

- **Ideia**
  - 1) utilizar informação dos vértices para estimar distância até destino
  - 2) ordem de exploração é definida pela estimação da distância (menor primeiro)
- Precisa de uma função para estimar distância
  - f(a_u, a_v) = estimativa da distância entre u e v usando a informação a_u e a_v disponível
  - f(a_u, a_v) não precisa ser exata, pode ser alguma heurística
- *Best-first Search*
  - Como a BFS mas explora na ordem de menor estimativa de distâncias (*best-first*)

Algoritmo Best-first Search

- Baseado na estrutura do algoritmo de Dijkstra

```
1.Best_first_search(G,s,d)
2.  Para cada vértice v
3.    dist[v] = infinito
4.  define conjunto S = 0 // vazio
5.  dist[s] = heuristica(s,d)
6.  Enquanto S != V
7.    Selecione u em V-S, tal que dist[u] é mínima
8.    Se u == d, pare
9.     Adicione u em S
10.    Para cada vizinho v de u faça
11.      Se dist[v] == infinito
12.        dist[v] = heuristica(v,d)
13.        pai[v]  = u
```

Estimativa de distância entre v e d (destino)

Função para estimar distância entre s e d

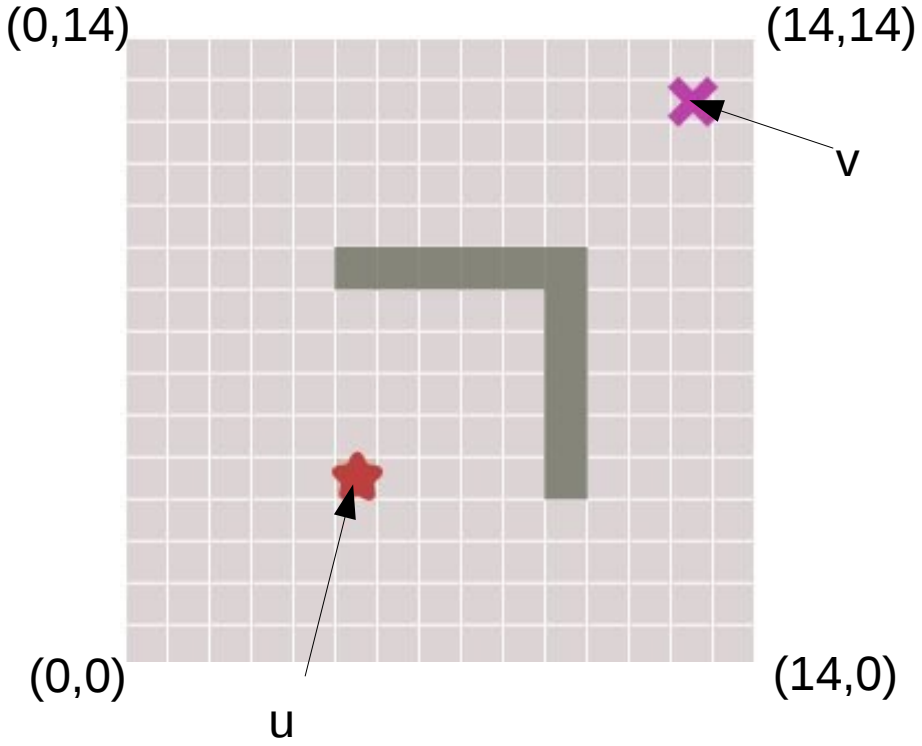
Atualizar a heurística para o vértice v

- Explora vértices na ordem dada pela heurística

Funciona? Encontra menor caminho?

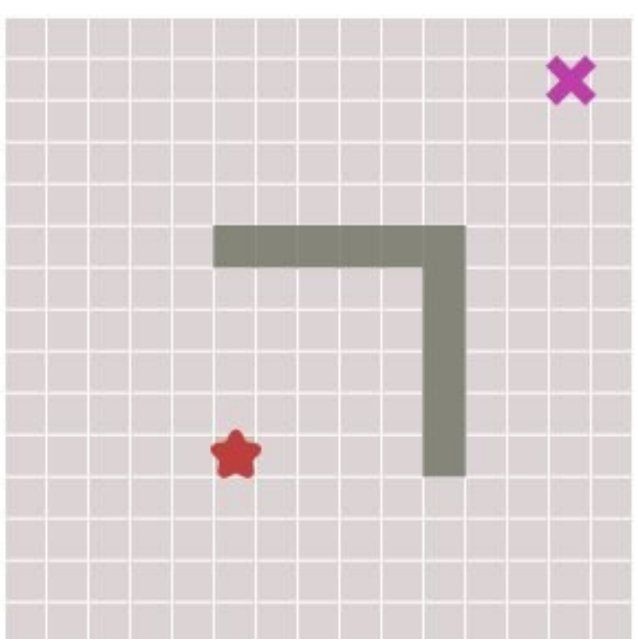
Exemplo de Heurística

- Grafo construído a partir de um grid
  - cada vértice é um célula do grid
  - cada vértice possui uma coordenada (x,y) no grid
- Distância de Manhattan entre vértices u e v
  - $f(u,v) = |x_u - x_v| + |y_u - y_v|$

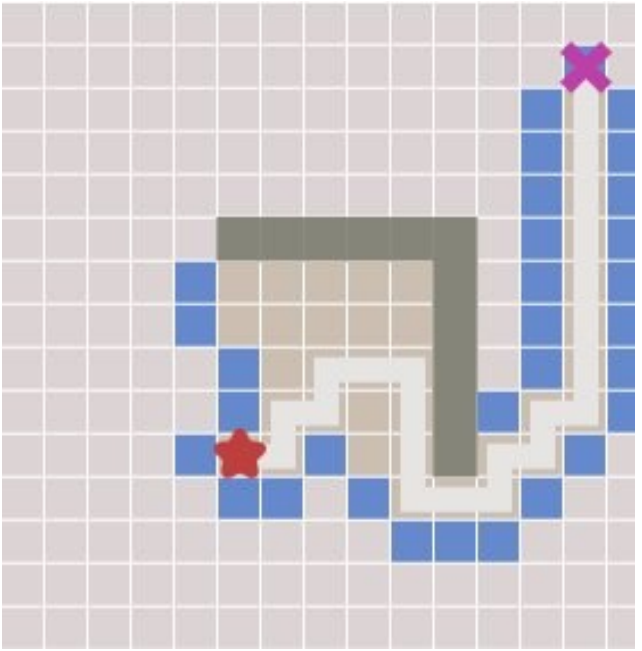


- Exemplo
- $f(u,v) = |5 - 13| + |4 - 13| = 17$
- Calculada a partir das coordenadas do vértices (e não do grafo)

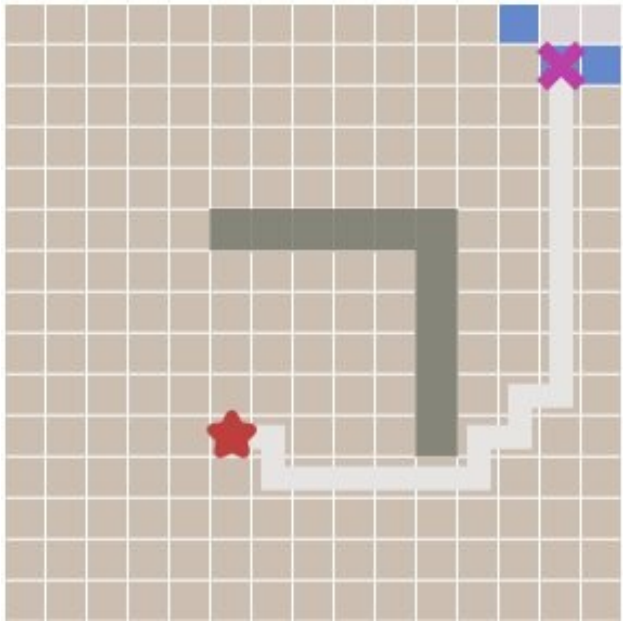
Exemplo Best-First Search



Best-first



BFS



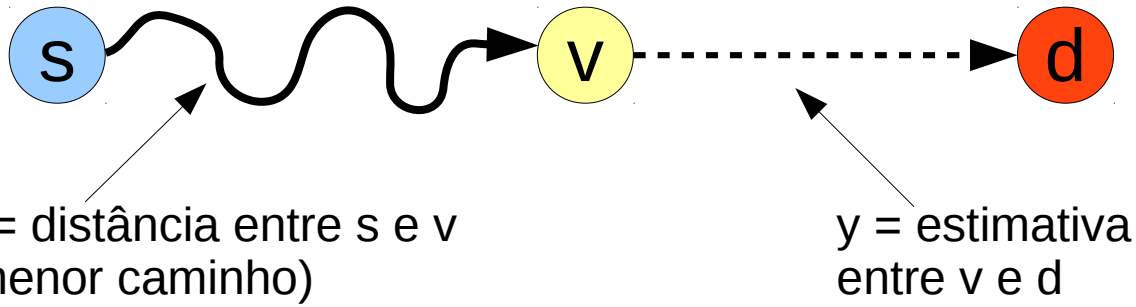
- Best-first search não garante menor caminho
- Best-first mais eficiente que BFS
- Tradeoff: eficiência x optimalidade

Melhorando Best-First

- **Problema:** Best-first não utiliza o que foi descoberto, confia muito na heurística

Ideia: Usar o que já foi descoberto!

- Considere s origem, d destino, e v um vértice qualquer já descoberto



- x + y: estimativa da distância entre s e d passando por v
- Explorar baseado nesta estimativa
- Se y = 0, estimativa é idêntica ao algoritmo de Dijkstra!

Algoritmo A*

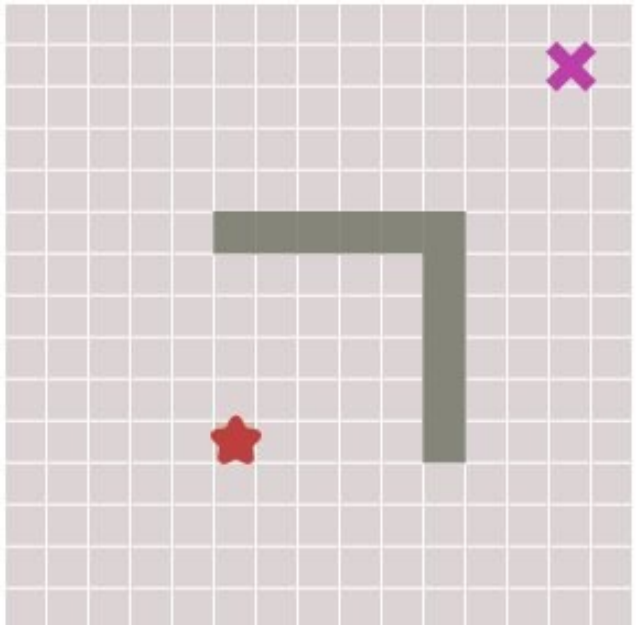
- Muito famoso (início anos 70) e muito utilizado, diversas aplicações em problemas de busca em IA
  - ex. jogos, como xadrez e Go
- Generaliza Dijkstra e possui propriedades importantes (que veremos)
- Implementação demanda dois vetores de distâncias
  - `dist_s[v]`: distância de s até v
  - `dist[v]`: estimativa de distância de s até d passando por v
  - `dist_s[v]`: mesmo vetor mantido pelo alg. de Dijkstra
  - `dist[v]`: define ordem de exploração dos vértices

Algoritmo A*

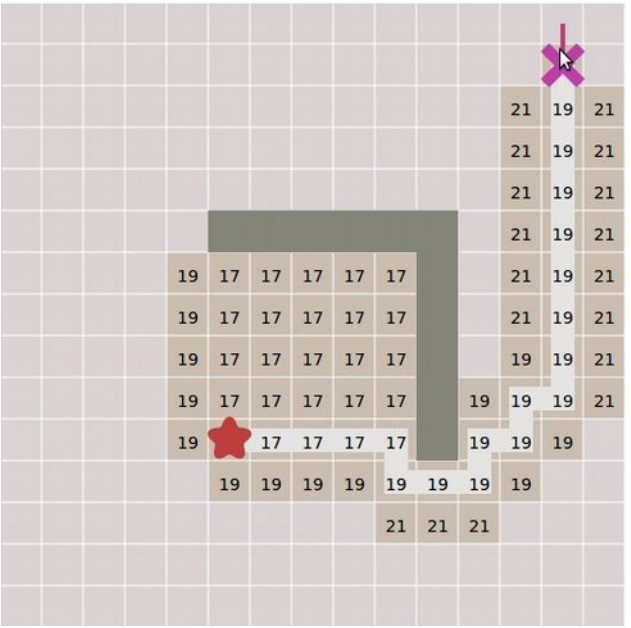
```
1.A_star(G,s,d)
2.  Para cada vértice v
3.    dist_s[v] = dist[v] = infinito
4.  Define conjunto S = 0 // vazio
5.  dist_s[s] = 0
6.  dist[s] = 0 + heuristica(s,d)
7.  Enquanto S != V
8.    Selecione u em V-S, tal que dist[u] é mínima
9.    Se u == d, pare
10.   Adicione u em S
11.   Para cada vizinho v de u faça
12.     Se dist_s[v] > dist_s[u] + w(u,v) então
13.       dist_s[v] = dist_s[u] + w(u,v)
14.       dist[v] = dist_s[v] + heuristica(v,d)
15.       pai[v] = u
```

- Extrai mínimo utilizando estimativa de distância
- Atualiza distância até v e estimativa até d via v

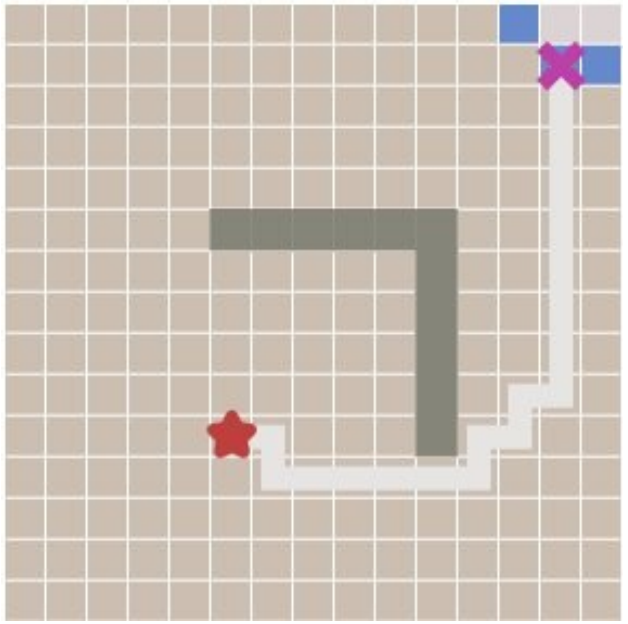
Exemplo do A*



A*



BFS

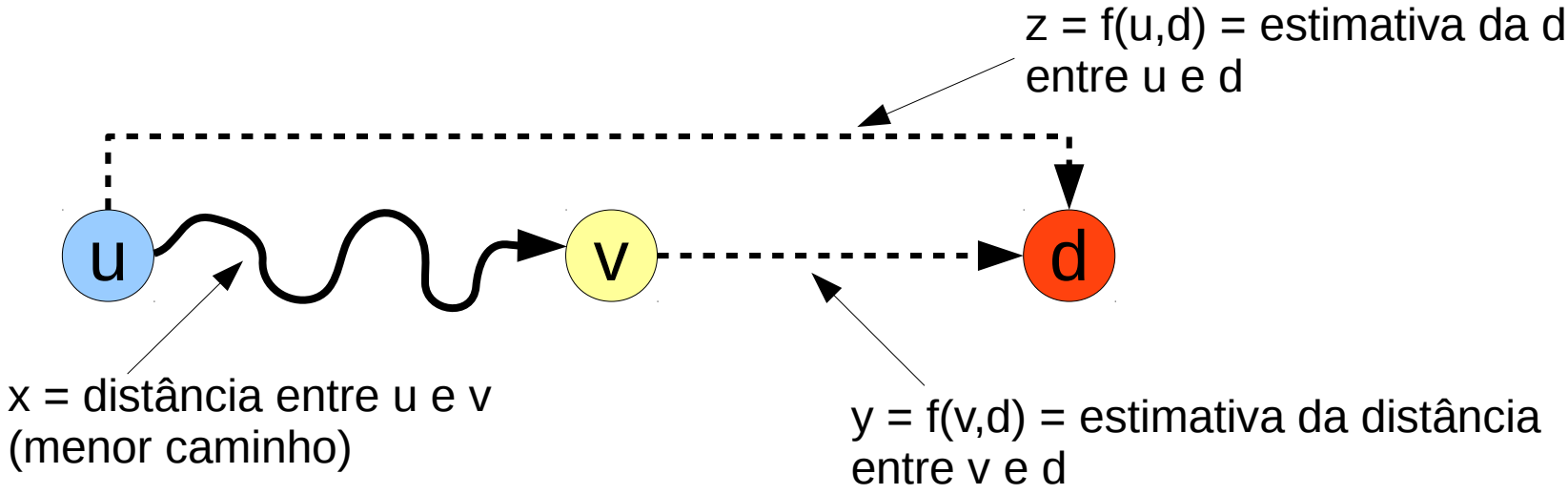


- A* encontrou caminho mínimo
- Explorou muito menos que BFS

Maravilha sempre?

Heurística Admissível

- Propriedade da função que estima distância entre um vértice e o destino



- função f é dita admissível se z <= x + y
  - f(u,d) <= dist(u,v) + f(v,d) para todos vértices do grafo
  - heurística é conservadora, nunca sobre estima a distância real no grafo

Propriedades do A*

- Teorema: A* retorna o caminho mínimo se heurística é admissível
  - ótima notícia, mas nem tanto

Como saber se heurística é admissível?

- Exemplo de mapas e caminhos (vértices são pontos no mapa e distância é comprimento do caminho)
  - f(u,v) = distância Euclideana entre as coordenadas no mapa dos vértices u e v
  - f é admissível: distância Euclideana é sempre menor que comprimento do menor caminho
- Em geral, difícil encontrar heurísticas admissíveis
- A* pode falhar em encontrar caminho mínimo
  - mas é mais eficiente que Dijkstra (*tradeoff*)

Explorando Buscas

- Website: Red Blob Games - Amit Patel
  - “I explore visual and interactive ways of explaining math and computer algorithms, especially those used in computer games. I want to learn by playing with things.”
- A* search: http://www.redblobgames.com/pathfinding/a-star/introduction.html

Explorem este (e outros) recursos deste website!

* imagens dos slides foram obtidas em exemplos deste website