Grafos – Aula 3

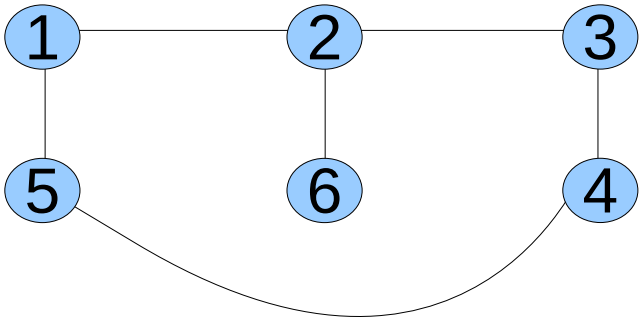
Roteiro

- Representando grafos
- Matriz e lista
- Operações básicas
- Tempos de acesso

Grafo

- Grafo G=(V, E)
  - V = conjunto de vértices, cada vértice representado por um número natural
  - E = conjunto de arestas (pares não-ordenados, ou pares ordenados)
- Exemplo
  - V = {1, 2, 3, 4, 5, 6},
  - E = {(1,2), (1,5), (2,3), (2,6), (3,4), (5,4)}

representação matemática de grafos



Representação visual de grafos

Representando Grafos

- Como representar grafos no computador?

Estrutura de dados

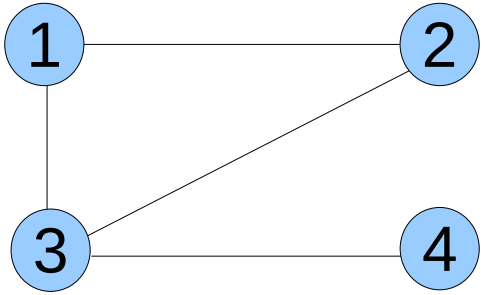
- Estruturas de dados fundamentais
  - vetor
  - matriz
  - lista
  - dicionário (tabela hash)

Representação via Matriz

- Como representar utilizando matrizes?
- **Idéia:** associar vértices às linhas e colunas da matriz
  - elemento da matriz indica se há aresta
- **Matriz de adjacência**
- Matriz n x n (n é número de vértices)
  - $a_{ij} = 1$, se existe aresta entre vértices i e j
  - $a_{ij} = 0$, caso contrário.

Matriz de Adjacência

- Exemplo



	1	2	3	4
1	0	1	1	0
2	1	0	1	0
3	1	1	0	1
4	0	0	1	0

	1	2	3	4	5
1	0	1	1	0	0
2	1	0	1	0	1
3	1	1	0	1	0
4	0	0	1	0	1
5	0	1	0	1	0

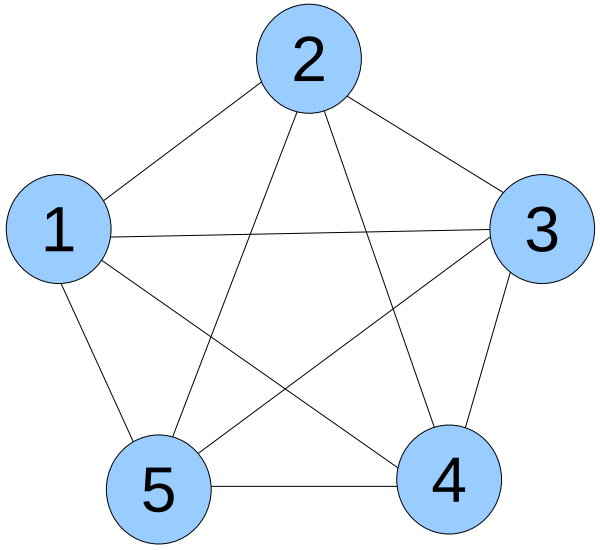
?

Algumas propriedades?

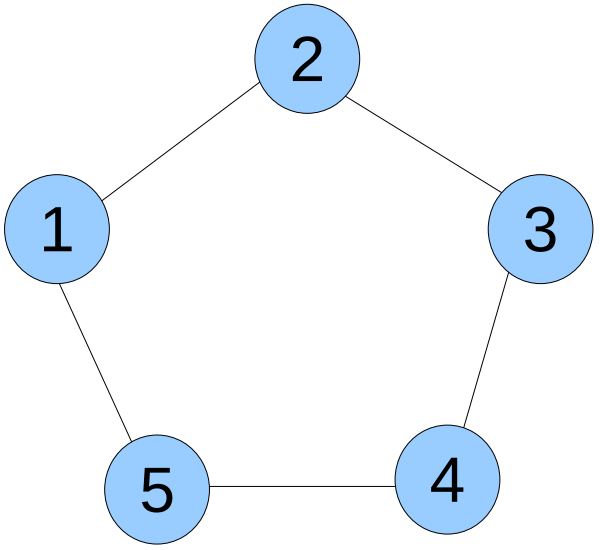
Representação via Matriz

- **Matriz de adjacência**
- Grafo completo?
- Grafo em ciclo?

K_5



C_5

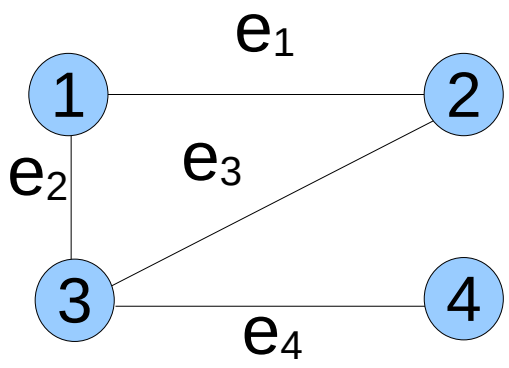


Matriz de Incidência

- **Idéia:** associar vértices às linhas e arestas às colunas
  - elemento da matriz indica se aresta incide sobre o vértice
  - precisa enumerar as arestas do grafo
- **Matriz de incidência**
- Matriz *n* x m (*n* vértices, m arestas)
  - $a_{ij} = 1$, se vértice *i* incide sobre aresta *j*
  - $a_{ij} = 0$, caso contrário.

Matriz de Incidência

- Exemplo



	e_1	e_2	e_3	e_4
1	1	1	0	0
2	1	0	1	0
3	0	1	1	1
4	0	0	0	1

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6
1	1	1	0	0	0	1
2	1	0	1	1	1	0
3	0	1	0	1	0	0
4	0	0	0	0	1	0
5	0	0	1	0	0	1

?

Algumas propriedades?

Custo de Memória

- Quanto espaço (memória) precisamos, em função de n (vértices) e m (arestas)?
- Matriz de adjacência ← n^2 posições
- Matriz de incidência ← nm posições
- Quantos bytes (ou bits) por posição?
  - 1 bit (no mínimo), 1 byte em geral
- Exemplos
  - $n=10^4 \rightarrow 10^8$ posições $\rightarrow 10^8$ bytes = 100MB
  - $n=10^5 \rightarrow 10^{10}$ posições $\rightarrow 10^{10}$ bytes = 10GB
  - $n=10^6 \rightarrow 10^{12}$ posições $\rightarrow 10^{12}$ bytes = 1TB

Complexidade quadrática, não escala!

Grafos Esparsos

- Considere grafos grandes e esparsos
  - *grande:* muitos vértices
  - *esparso*: relativamente poucas arestas
- Exemplo no Facebook: $n=10^9$, $m=10^{11}$
  - grau médio = 2m/n = 200
- Matriz formada principalmente de zeros!

Grande consumo de memória (desnecessário)!

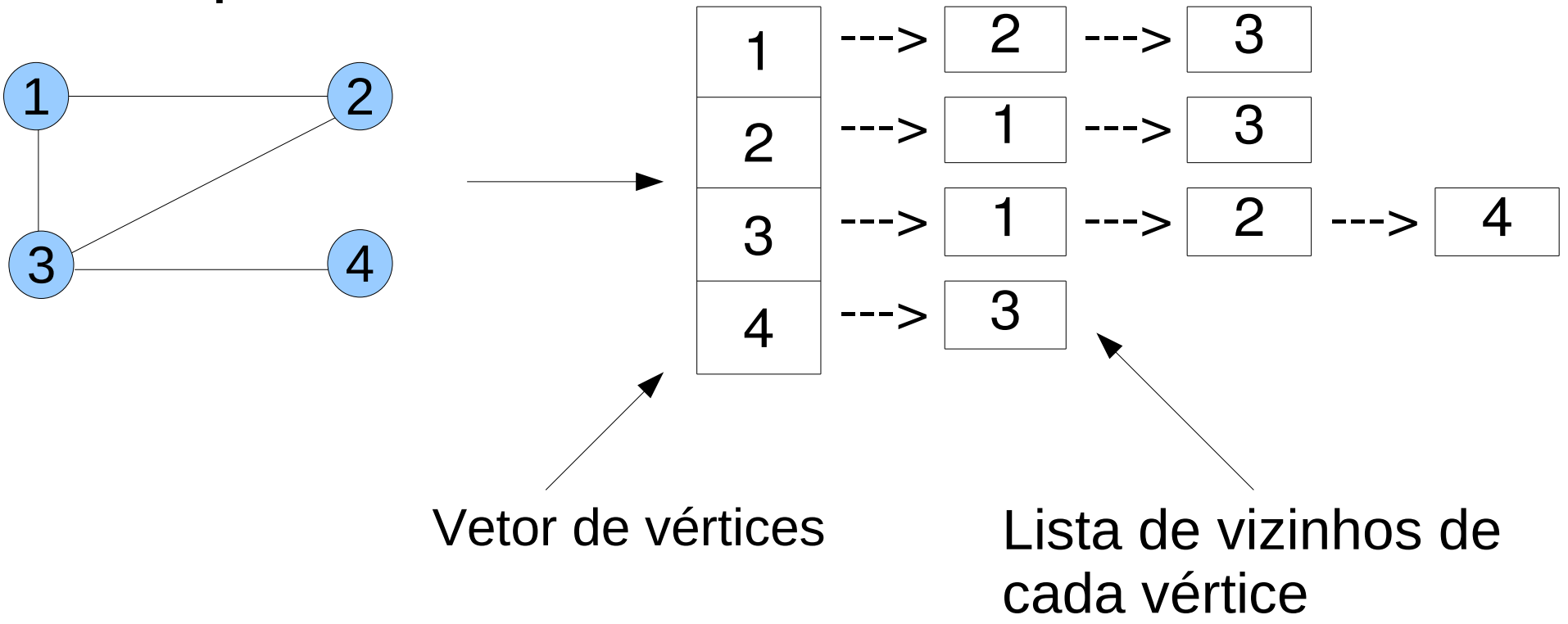
- Como resolver este problema?

Representação via Listas

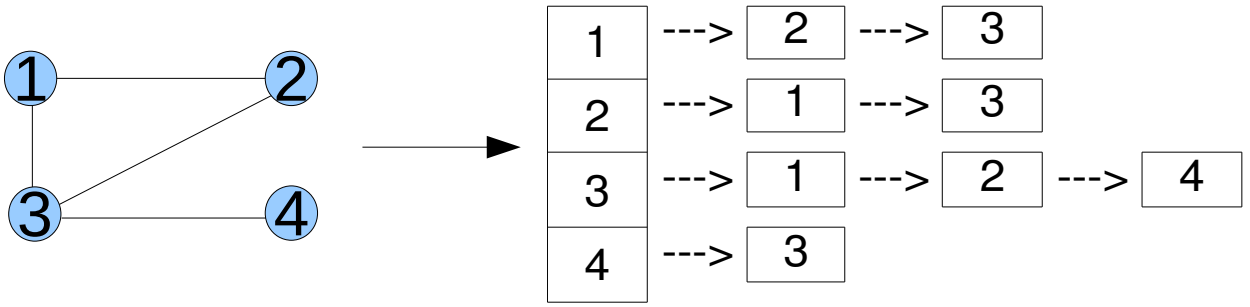
- **Idéia:** associar a cada vértice uma lista de vértices adjacentes (lista de vizinhos)
- **Lista de adjacência**
- Vértices associados a um vetor de dimensão *n* (número de vértices no grafo)
- Cada vértice possui uma lista de vértices adjacentes

Lista de Adjacência

- Exemplo



Custo de Memória



- Cada aresta ocorre duas vezes na estrutura de dados
  - ex. (1,2) está na lista de 1 e na lista de 2
- Memória necessária será proporcional a 2 vezes o número de arestas
  - manter índice do vértice, mais ponteiro da lista
- Muito eficiente
  - grafo com 2 milhões de vértices e 100 milhões de arestas → $2 * 10^7 * 12$ bytes = 240M bytes

Vantagens e Desvantagens

- Vantagem: listar todos os vizinhos de um vértice
  - basta percorrer a lista de vizinhos
- Desvantagem: decidir se um vértice é vizinho de outro
  - precisa percorrer toda a lista no pior caso

Tempo de acesso depende da operação

Tempo de Acesso

- Vetor x Lista (código em Java)

```
int n = 1000000;
Vector vec = new Vector(n);

for(int i = 1;  i <= n; i=i+1)
        vec.add((String) i);

String p = vec[n-1];
```

```
int n=1000000;
LinkedList ll = new LinkedList();

for(int i = 1;  i <= n; i=i+1)
        ll.add((String) i);

String p = ll.get(n-1);
```

“constante”: não depende de n

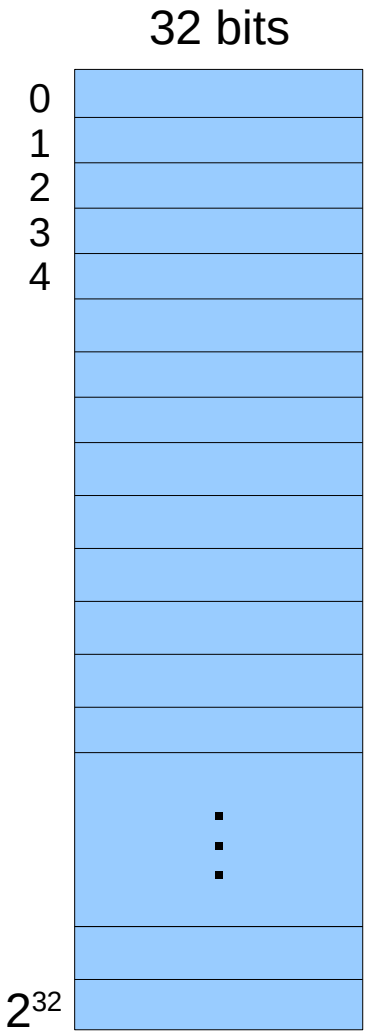
- Quanto tempo para executar última linha?

“linear”: depende linearmente de n, 1000000 vezes maior!

Por que?

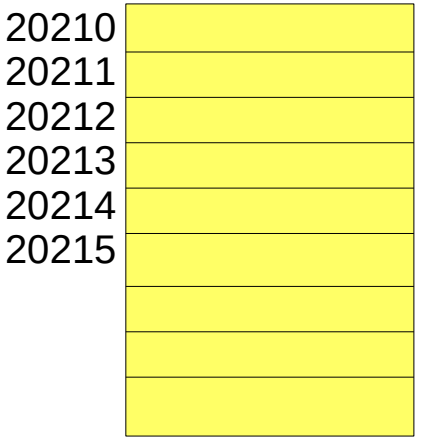
Vetor x Lista

- Memória do computador organizada como uma matriz

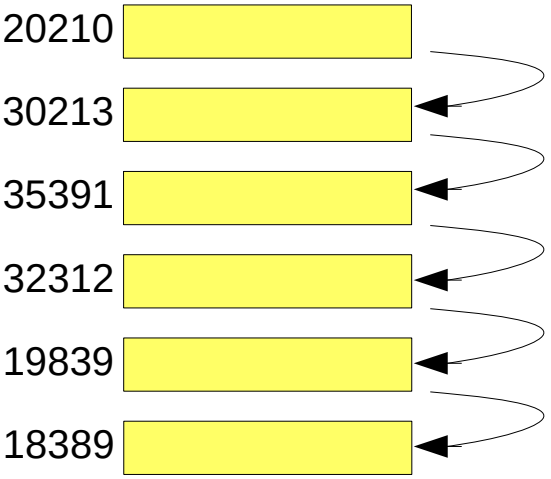


Capacidade: 4GB

Vetor: alocação contígua em memória



Lista: alocação elemento a elemento, ponteiro para próximo

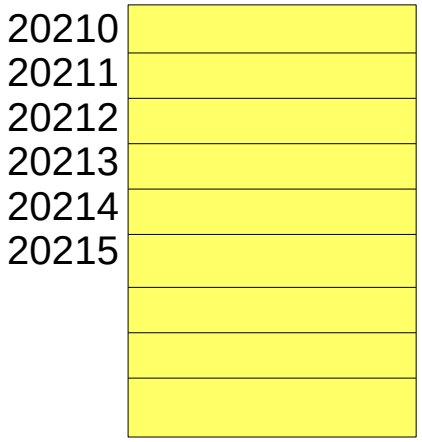


- Como “chegar” no k-ésimo elemento?
  - qual endereço do k-ésimo elemento?

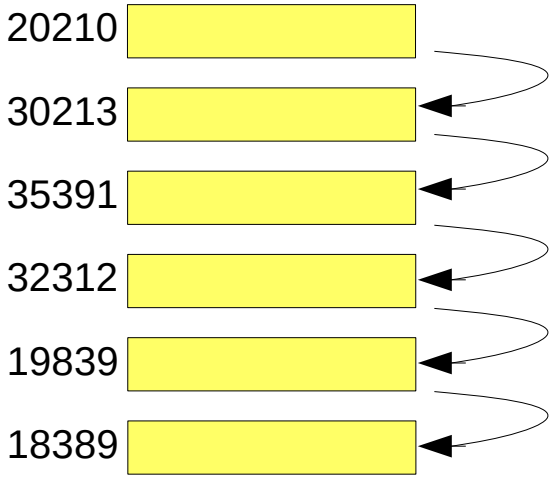
Vetor x Lista

- Como chegar no k-ésimo elemento?

Vetor



Lista



• Variável *vec* tem o endereço base, onde começa o vetor na memória
• Cada elemento tem tamanho (L)
• Endereço do elemento k:
base + (k-1)*L

Constante!

• Variável *ll* tem o endereço do primeiro elemento
• Cada elemento tem endereço do próximo elemento
• Endereço do elemento k:
tem que percorrer a lista!

Proporcional a k!

Vantagens/Desvantagens

- Tempo de execução

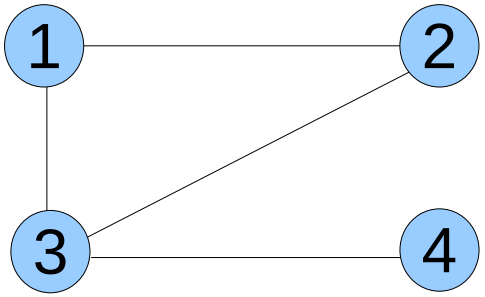
	Matriz	Lista
Inserir aresta?	O(1)	O(1)
Remover aresta?	O(1)	$O(g_{max})$
Testar adjacência (v_1 e v_2 são vizinhos)?	O(1)	$O(g_{max})$
Listar vizinhos de v?	O(n)	$O(g_{max})$
Descobrir vértice de maior grau?	$O(n^2)$	$O(n\ g_{max})$

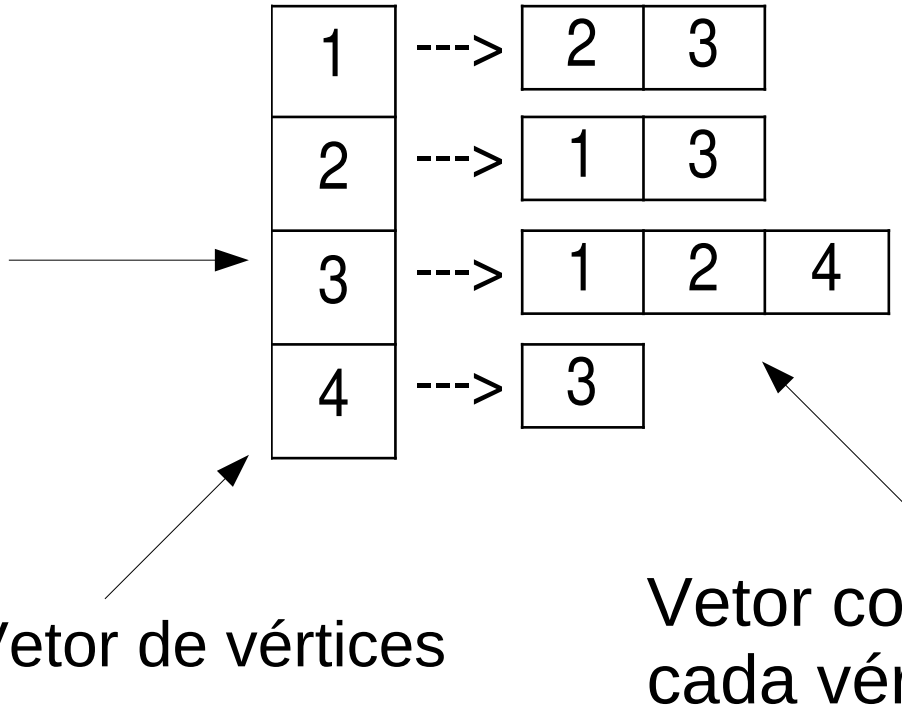
O(1) = tempo constante

g_{max} = maior grau do grafo

Vetor de Adjacência

- Exemplo





- Parecida com lista de adjacência
- Mesma complexidade (memória e tempo)
  - vantagens na prática

Por que?

Dicionário

- Dicionário com as aretas do grafo
  - arestas são a chave, valor é constante (valor 1)
- Aresta é um par não ordernado
  - ordem importa para a chave
  - acertar menor, maior
- Exemplo:
  - (1,2) → “1 2” chave, (4,2) → “2 4” chave
- Complexidade (memória e tempo)
  - vantagens e desvantagens

Por que?

Matriz x Lista

- Qual é a estrutura mais adequada (ou mais eficiente)?

Depende do algoritmo!

- Memória x Tempo: eficiente em que aspecto?
  - matriz sempre utiliza mais memória (muitas vezes é inviável)
  - matriz ou lista pode levar menos tempo

Implementarão as duas!