

Teoria dos Grafos - COS 242

2025/2

Segunda Lista de Exercícios

ATENÇÃO! Para um melhor rendimento do processo de aprendizagem, responda às perguntas de forma precisa e completa.

Questão 1: Considere um grafo $G = (V, E)$ qualquer. Calcule o número de arestas do grafo utilizando apenas os vértices e seus respectivos graus. Ou seja, calcule $m = |E|$ em função de d_v , onde d_v representa o grau do vértice $v \in V$.

Questão 2: Considere duas estruturas de dados para representação de grafos no computador: matriz de adjacência e lista de adjacência. Considere agora um grafo $G(V, E)$ com n vértices e m arestas.

1. Calcule a quantidade de memória (em bytes) necessária para representar o grafo utilizando uma matriz de adjacência. Considere o caso onde o elemento da matriz é um byte (ex., um caractere) e o caso onde o elemento é um bit.
2. Calcule a quantidade de memória (em bytes) necessária para representar o grafo utilizando uma lista de adjacência. Considere o caso onde os vértices do grafo são representados por um número do tipo *inteiro*, que ocupa 4 bytes de memória, e que o ponteiro ocupa 8 bytes de memória (64 bits).
3. Estabeleça a condição tal que a quantidade de memória necessária para representar o grafo utilizando uma lista de adjacência seja menor do que uma matriz de adjacência. Sua condição deve ser em função da *densidade* do grafo. A densidade de um grafo é a fração de arestas que o grafo possui em relação ao grafo completo, ou seja, $d = m / \binom{n}{2}$.
4. O grafo dos atores utilizado para calcular o número de Kevin Bacon tem aproximadamente 250 mil vértices e 7,6 milhões de arestas. Calcule a quantidade de memória, em megabytes ($1\text{MB} = 2^{20}$ bytes), que é necessária para representar o grafo utilizando uma matriz de adjacência e uma lista de adjacência. Qual é a estrutura mais eficiente (em termos de memória) neste caso?

Questão 3: Desenhe todas as árvores geradoras distintas do grafo K_3 . Quantas árvores geradoras distintas este grafo possui? Quantas árvores geradoras distintas possui o grafo K_4 ? Descubra a fórmula para o número de árvore geradoras distintas de K_n (tente deduzir antes de procurar). Verifique suas respostas e descubra o famoso nome deste número!

Questão 4: Considere o grafo ilustrado na figura abaixo. Tomando o vértice B como ponto de partida da busca e assumindo que os vizinhos de um vértice são percorridos (encontrados) em ordem alfabética, determine:

1. A ordem em que os vértices são explorados (ou seja, removidos da fila) ao realizarmos uma busca em largura.
2. A árvore geradora induzida pela busca em largura.
3. A ordem em que os vértices são explorados (ou seja, removidos da pilha) ao realizarmos uma busca em profundidade.
4. A árvore geradora induzida pela busca em profundidade.

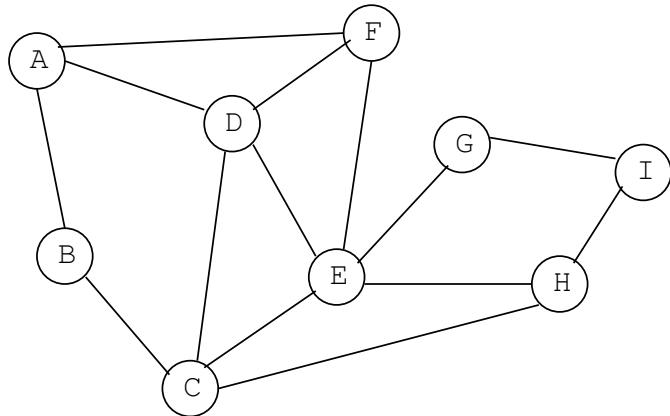


Figura 1: Um grafo não-direcionado.

Questão 5: Considere os dois algoritmos de busca apresentado em aula (BFS e DFS) e um grafo conexo G .

1. Mostre que cada vértice do grafo é explorado exatamente uma vez. Explorado significa analisar (percorrer) todos os vizinhos.
2. Mostre que cada aresta do grafo é examinada exatamente duas vezes.
3. Durante a execução da BFS, qual é o maior número de elementos que a fila pode ter? Qual grafo atinge este valor?
4. Durante a execução da DFS, qual é o maior número de elementos que a pilha pode ter? Qual grafo atinge este valor?

Questão 6: Descreva um algoritmo (em pseudo-código) para detectar se um determinado grafo G é uma árvore. Caso negativo, seu algoritmo deve imprimir um dos ciclos do grafo (mas não todos). O tempo de execução do algoritmo deve ser $O(m + n)$, onde n e m representam o número de vértices e arestas de G , respectivamente.

Questão 7: Modifique o algoritmo de busca em largura (BFS) apresentado em aula de forma a associar cada vértice do grafo ao seu respectivo nível e vértice pai na árvore geradora induzida pela busca. Ou seja, ao final da execução do algoritmo, $nível[v]$ e $pai[v]$ devem retornar o nível ao qual pertence o vértice v e o pai do vértice v na árvore, respectivamente. Por convenção, o nível do vértice raiz é zero.