Teoria dos Grafos - COS 242
2025/2

Quinta Lista de Exercícios

ATENÇÃO! Para um melhor rendimento do processo de aprendizagem, responda às perguntas de forma precisa, contemplando adequadamente o que é solicitado.

Questão 1: Considere a rede de fluxos ilustrada abaixo, com capacidades e fluxos indicados em cada aresta. Determine:

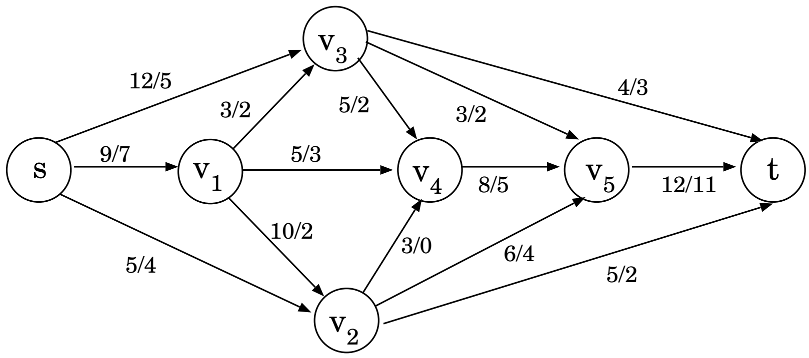

Figura 1: Uma rede de fluxos $s - t$; pesos nas arestas indicam capacidade/fluxo.

1. Qual é o valor deste fluxo?
2. O fluxo ilustrado é fluxo máximo?
3. Determine o corte s-t mínimo da rede de fluxo e sua capacidade.

Questão 2: Decida se cada afirmação abaixo é verdadeira ou falsa. Se for verdadeira, dê uma breve explicação. Se for falsa, dê um contra-exemplo.

1. Seja $G = (V, E)$ uma rede de fluxos qualquer com vértice de origem s e destino t, e capacidades c_e inteiras e positivas associadas a cada aresta $e \in E$, e seja (A, B) um corte $s - t$ mínimo desta rede de fluxos. Suponha agora que adicionamos uma unidade às capacidades de todas as arestas da rede. Temos então que o corte (A, B) continua a ser um corte $s - t$ mínimo desta nova rede de fluxos.
2. Considere um corte (X, Y) da rede de fluxo de forma que os vértices s e t estejam em X. O fluxo total deste corte é sempre igual ao valor de fluxo da rede.

Questão 3: Considere o algoritmo original de Ford-Fulkerson para resolver o problema do fluxo máximo. Considere a rede de fluxo abaixo.

1. Mostre como uma execução do algoritmo pode levar muito tempo para convergir. Determine a operação do algoritmo passo-a-passo, assim como o grafo residual. Quantas iterações serão necessárias no pior caso?
2. Considere a melhoria do algoritmo discutida em aula (que considera caminhos com capacidade de no mínimo Δ, para diferentes valores de Δ). Determine a operação do algoritmo passo-a-passo, assim como o grafo residual. Quantas iterações serão necessárias no pior caso?

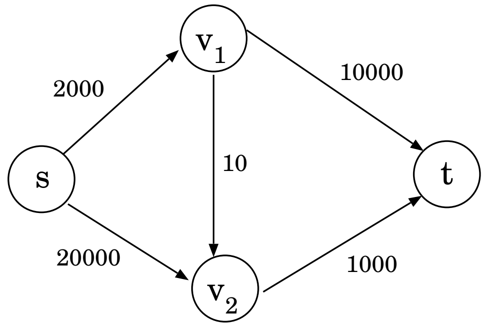

Figura 2: Uma rede de fluxos patológica (pesos nas arestas indicam capacidade).

Questão 4: Considere um conjunto $P = \{p_1, \ldots, p_n\}$ de professores e um conjunto $D = \{d_1, \ldots, d_m\}$ de disciplinas e um conjunto I que representa o interesse dos professores em oferecer as disciplinas, de forma que o par ordenado $(p, d) \in I$ indica que o professor $p \in P$ tem interesse em oferecer a disciplina $d \in D$. Dados os três conjuntos, o problema é determinar o maior número de disciplinas que podem ser oferecidas simultaneamente pelo conjunto de professores, segundo seus interesses declarados. Modele o problema usando grafos e considere os seguintes casos.

1. Assuma que não há um limite superior para o número de disciplinas que um professor pode oferecer. Determine um algoritmo eficiente para o problema (dica: transforme o problema).

2. Assuma que cada professor deve oferecer no máximo uma disciplina. Determine um algoritmo eficiente para o problema (dica: transforme o problema).

Questão 5: Duas pessoas jogam um jogo em um grafo G bipartido conexo com n vértices ($n/2$ em cada parte) selecionando vértices distintos $v_0, v_1, v_2, \ldots$ alternadamente tal que, para $i > 0$, v_i é necessariamente adjacente a v_{i-1}. O vértice v_0 (primeiro da sequência) é escolhido pelo primeiro jogador de forma arbitrária. Cada vértice pode ser selecionado apenas uma vez. O jogador que selecionar o último vértice da sequência ganha o jogo.

1. Desenhe um grafo bipartido conexo com seis vértices onde o primeiro jogador pode sempre vencer. Ou seja, existe uma sequência de escolhas que o primeiro jogador pode fazer que sempre leva a vitória, independente das escolhas que o segundo jogador fizer.

2. Mostre que o primeiro jogador tem uma estratégia vencedora (como a do exemplo acima) se e somente se G não possui um emparelhamento perfeito.

Questão 6: Problema da Excursão: R famílias partem numa excursão em S veículos. Existem f_i pessoas na família i, com $i = 1, \ldots, R$, e v_j lugares no veículo j, com $j = 1, \ldots, S$. Descreva um procedimento (pseudo-algoritmo) que decide se é possível organizar as pessoas nos veículos de forma que nenhum veículo tenha duas ou mais pessoas da mesma família. Dica: rede de fluxo!