Grafos - Aula 12

Roteiro

- Paradigma guloso
- Coloração
- Número cromático
- Algoritmo guloso
- Teorema das 4 cores

Aula passada

- MST
- Algoritmo de Prim
- Algoritmo de Kruskal
- Propriedades da MST
- Corretude dos algoritmos

Projetando Algoritmos

- Dado um problema P, como projetar um algoritmo que resolva o problema?
  - ex. determinar maior clique de um grafo
- Técnicas para *mecanizar* a construção de algoritmos

Problema Central da Computação!

- Ainda faltam princípios e técnicas fundamentais
  - projeto de algoritmos ainda baseado em arte
- **Algumas técnicas:** força bruta, técnica gulosa, programação dinâmica

Força Bruta

- Buscar pela solução no espaço de possíveis soluções para o problema
  - enumerar e testar possíveis soluções, retornar a melhor encontrada
- Ex. encontrar um clique de tamanho k em um grafo
  - enumerar todas combinações com k vértices, verificar se há arestas entre todos os vértices

Problema ?

- Algoritmo tem alta complexidade (espaço de soluções cresce rapidamente)
  - inadequado para problemas grandes
- Geralmente é fácil mecanizar usando força bruta

Algoritmo Guloso

- **Ideia:** algoritmo constrói solução de forma iterativa, tomando decisões ótimas a cada passo para otimizar algum objetivo global
  - cada iteração resolve um problema “pequeno” e “local” de forma ótima

Exemplos vistos em aula!

- Dijkstra: processo iterativo, a cada passo escolhe vértice de menor distância
- A*: processo iterativo, escolhe melhor estimativa de distância
- Kruskal: processo iterativo, a cada passo escolhe aresta de menor peso

Algoritmo Guloso

Vantagens

- Geralmente fácil de construir
- Baixa complexidade
- Heurísticas (intuição) ajudam na optimalidade

Desvantagens

- Geralmente não obtém solução ótima
- Garantir (provar) optimalidade é difícil
- Podem gerar soluções ruins

Técnica fundamental para projetar algoritmos

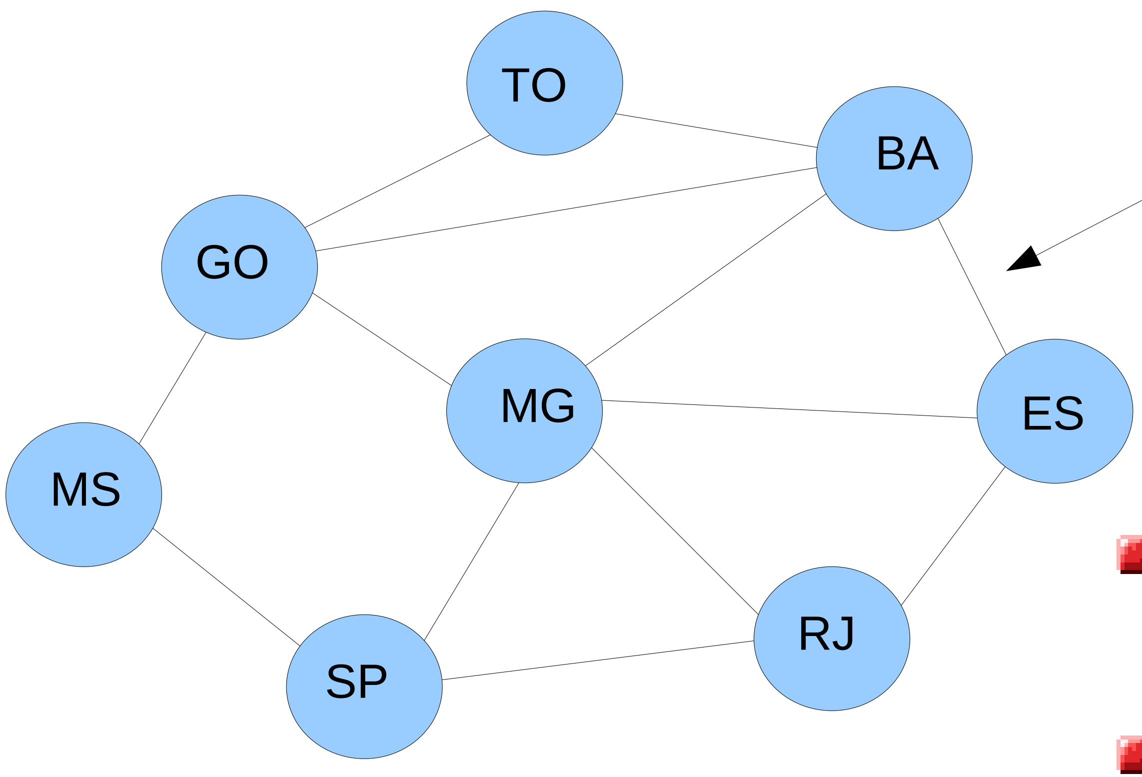
Colorindo um Mapa

- Mapa de regiões (estados)
- Colorir o mapa
  - regiões vizinhas (com fronteira) **não** podem ter mesma cor

- **Problema 1:** Como colorir um mapa atendendo a restrição?
- **Problema 2:** Qual é o **menor** número de cores necessário?

Colorindo um Mapa

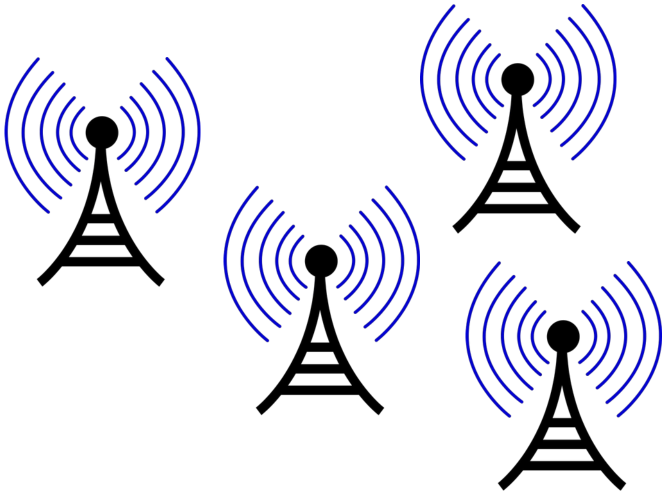
- Abstração via grafos
- Vértices: regiões (estados)
- Arestas: duas regiões são vizinhas



BA e ES são vizinhos

- Vértices vizinhos não podem ter mesma cor
- Número mínimo de cores?

Alocação de Frequências



- Rede telefonia celular
  - estações base (torre)
- Células vizinhas não podem usar mesma frequência de rádio
  - interferência!

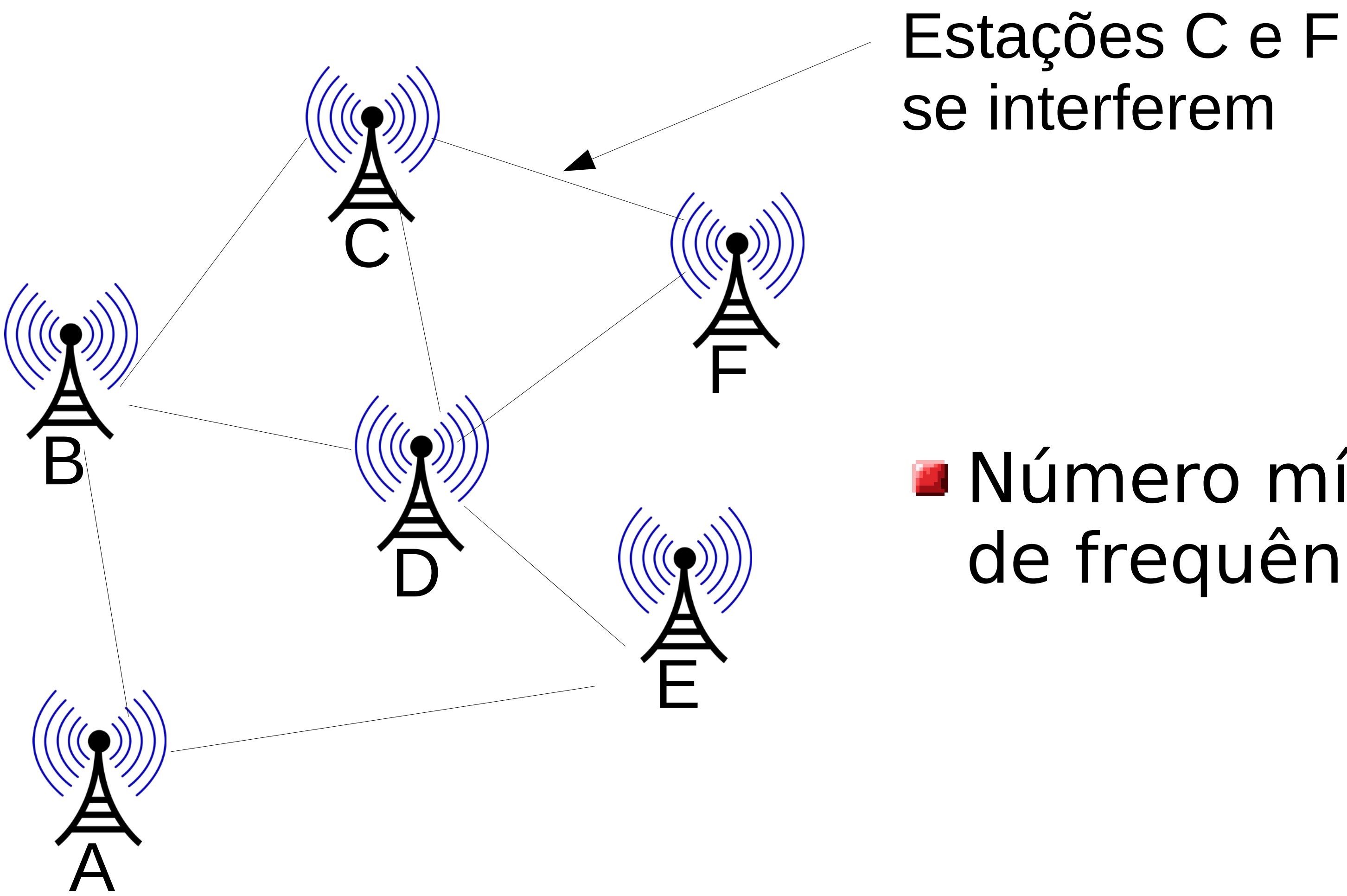
- **Problema 1:** Como alocar frequência às células?

- **Problema 2:** Qual é o menor número de frequências necessário?

Mesma abstração!

Alocação de Frequências

- Vértices: estações base
- Arestas: duas estações são vizinhas (interferem)



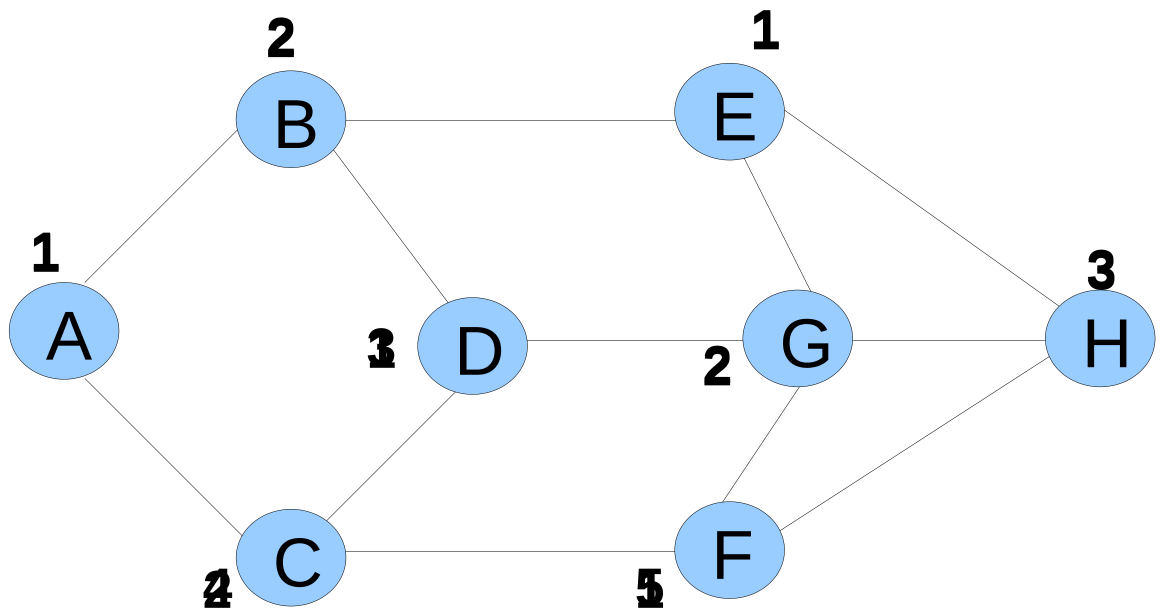
- Número mínimo de frequências?

Coloração de Vértices

- Dado grafo G = (V, E), colorir seus vértices
- Restrição: vértices vizinhos não podem ter a mesma cor
- *k-coloração*: coloração que utiliza exatamente *k* cores
  - dizemos que o grafo é *k-colorível*
  - todo grafo com *n* vértices é *n*-colorível
- **Número cromático**: menor número de cores necessário para colorir o grafo
  - grafo completo: número cromático é *n*

Exemplo

- Uma coloração qualquer?
- Número cromático?



- Coloração qualquer é fácil, coloração com o número cromático é mais difícil

Algoritmo para Coloração

- Algoritmo para colorir um grafo com o menor número de cores possível
- Aplicar a técnica gulosa
  - guloso em que aspecto?
- **Obs:** vértices de maior grau possuem mais restrições
- **Ideia:** guloso no grau do vértice
  - colorir primeiro os mais restritos

Algoritmo Guloso

- Guloso no grau dos vértices
  - em ordem decrescente

```
1.Colorir(G)
2.  Ordenar vertices em ordem decrescente de grau
3.  Define conjunto C[i] = 0 para i=1,...,n
4.  Para j=1, ..., n faça
5.    Selecione r, a menor cor para colorir v[j]
      // menor r tal que nenhum vertice em C[r]
      // seja vizinho de v[j]
6.    Incluir v[j] em C[r]
```

Observações:

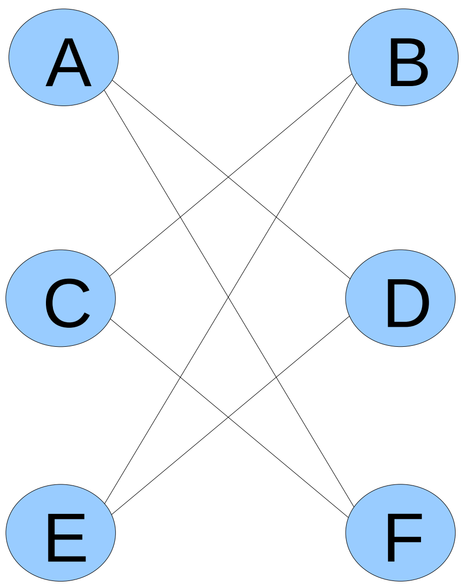
- v[j] : j-ésimo vértice na ordenação decrescente por grau
- C[i] : conjunto de vértices que tem cor i
- C[r] = 0 : cor r não foi usada

Algoritmo Guloso

- Algoritmo gera uma coloração de G?
  - sim, corretude é dada pelo próprio funcionamento

- Algoritmo obtém o número cromático?
  - não está claro, mas a resposta é não!

Contra-Exemplo



- Todos os vértices possuem mesmo grau
- Ordenação 1: A,B,C,D,E,F
  - 3 cores
- Ordenação 2: A,C,E,B,D,F
  - 2 cores

- Número de cores depende da ordenação dos vértices
- Como saber qual a melhor ordenação para coloração?

Número Cromático

- Não se conhece algoritmo eficiente (tempo polinomial) para determinar o número cromático de um grafo qualquer
  - algoritmo guloso nem sempre usa o menor número de cores
- Determinar se um grafo é *k-colorível* é igualmente difícil, para k > 2
  - para k = 2 é bem fácil (*dever de casa*)

Coloração é problema difícil
(e vale 1 milhão de dólares)

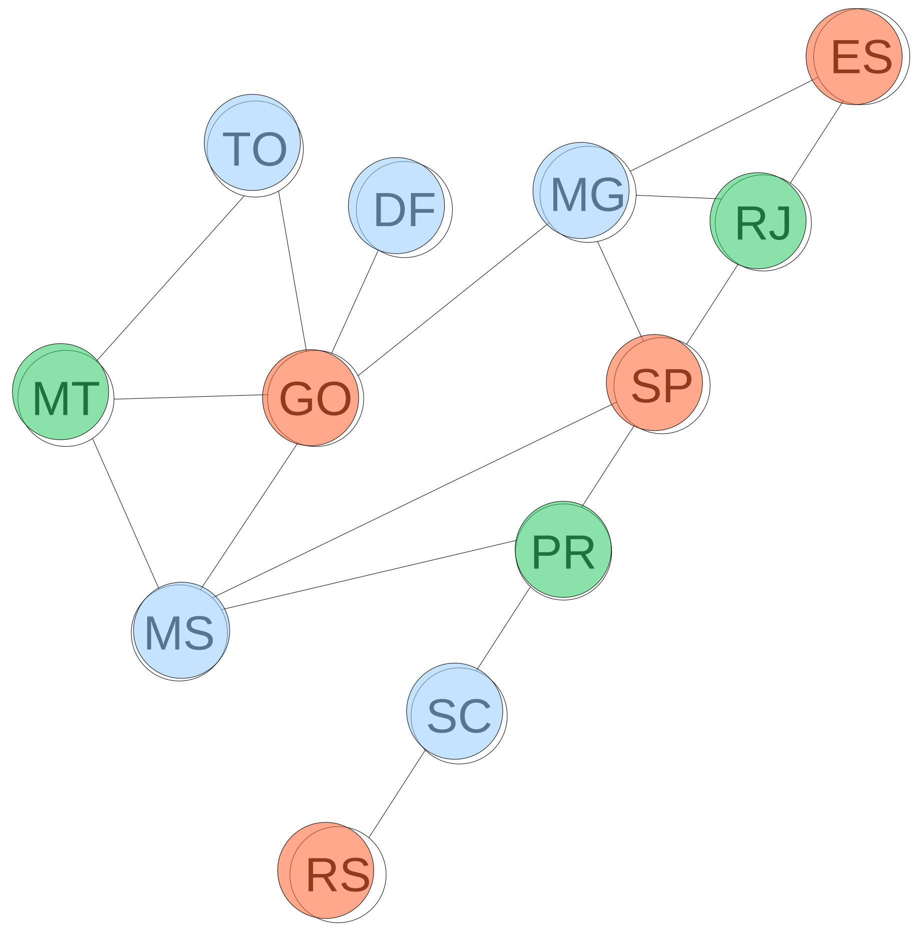
Coloração de Mapas

- Caso especial de coloração de grafos
- Grafo induzido pelo mapa é *planar*
  - restrição geométrica imposta pelas fronteiras
- Um grafo é planar se é possível desenhar o grafo sem cruzar as arestas

- **Problema**: Qual é o menor número de cores necessário para colorir qualquer mapa?

Exemplo

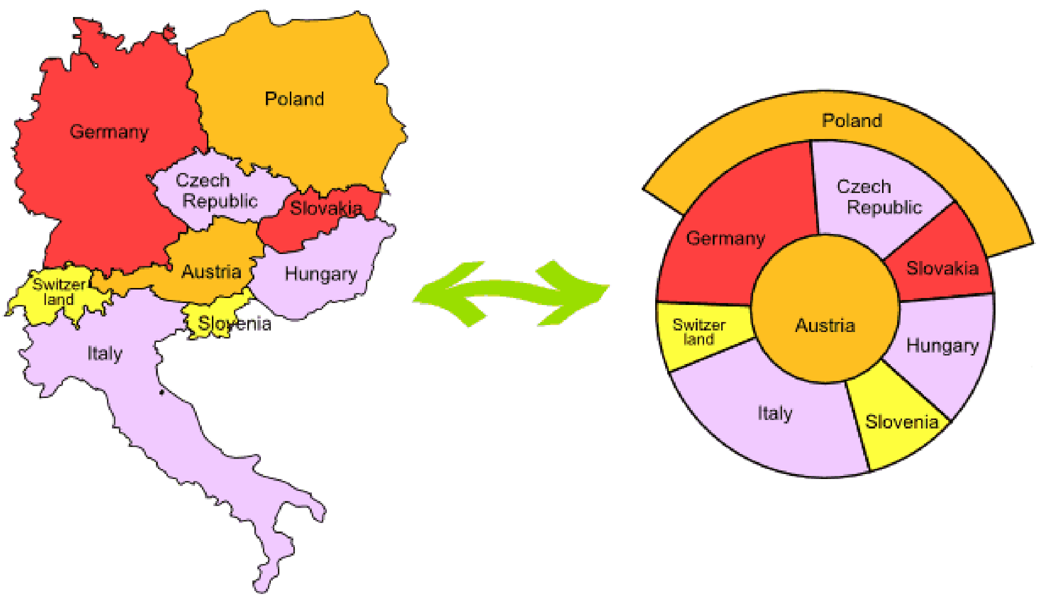
- Região Sul, Sudeste e Centro-Oeste

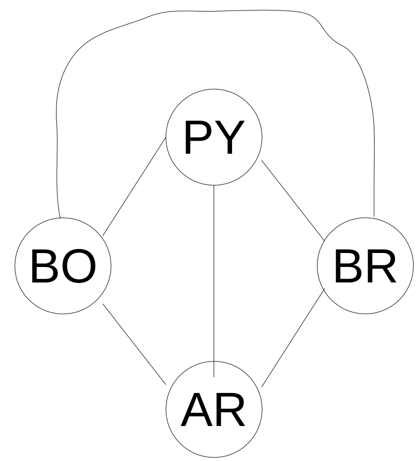


- Grafo é planar
- Número cromático?

Exemplo com 4 Cores

- Existe mapa que demanda quatro cores?





- Existe mapa que demanda cinco cores?

Não!

Teorema das 4 Cores

- Quatro cores são suficientes para colorir qualquer mapa
- Conjectura de De Morgan em 1852
- Várias provas erradas da conjectura!
- Provado somente em 1972 por Appel, Haken e um computador
  - prova por “força bruta” mostra que não há mapa para qual 5 cores seja necessário
  - Análise de 2000 casos, via computador
- Primeira grande prova com ajuda do computador
- Matemáticos não gostam: e se código tiver bug?
  - amplamente verificada e validada posteriormente