

# Algoritmos de Monte Carlo e Cadeias de Markov – CPS 767

## 2018/1

Prof. Daniel R. Figueiredo

### Primeira Lista de Exercícios

**Dica:** Para ajudar no processo de aprendizado responda às perguntas integralmente, mostrando o desenvolvimento das respostas.

#### Questão 1: Filhos e filhas

Considere um casal que tem dois descendentes e que as chances de cada um deles ser filho ou filha são iguais. Responda às perguntas abaixo:

1. Calcule a probabilidade dos descendentes formar um casal (ou seja, um filho e uma filha).
2. Calcule a probabilidade de ao menos um dos descendentes ser filho.
3. Calcule a probabilidade das duas serem filhas dado que a uma é filha (cuidado!).
4. Calcule a probabilidade dos descendentes nascerem no mesmo dia (assuma que a chance de nascer em um determinado dia é igual a qualquer outro)

#### Questão 2: Dado

Considere um icosaedro (um sólido Platônico de 20 faces) tal que a chance de sair a face  $i = 1, \dots, 20$  seja linearmente proporcional a  $i$ . Ou seja,  $P[X = i] = ci$  para alguma constante  $c$ , onde  $X$  é uma variável aleatória que denota a face do dado. Responda às perguntas abaixo:

1. Determine o valor de  $c$ .
2. Calcule o valor esperado de  $X$  (obtenha também o valor numérico)
3. Calcule a probabilidade de  $X$  ser maior do que a média do dado.
4. Calcule a variância de  $X$  (obtenha também o valor numérico).
5. Repita os últimos três itens para o caso do dado ser uniforme, ou seja,  $P[X = i] = 1/20$ ,  $i = 1, \dots, 20$ . Qual dado possui maior variância? Compare os resultados.

#### Questão 3: Dado em ação

Considere a versão uniforme do dado acima, ou seja,  $P[X = i] = 1/20$ ,  $i = 1, \dots, 20$ . Seja  $Y$  uma variável aleatória indicadora da primalidade da face do dado. Ou seja,  $Y = 1$  quando o  $X$  é um número primo, e  $Y = 0$  caso contrário. Responda às perguntas abaixo:

1. Determine  $P[Y = 1]$ .
2. Considere que o dado será jogado  $n$  vezes. Seja  $Y_i$  a indicadora da primalidade da  $i$ -ésima rodada, para  $i = 1, \dots, n$ , e defina  $Z = \sum_{i=1}^n Y_i$ . Repare que  $Z$  é uma variável aleatória que denota o número de vezes que o resultado é primo. Determine a distribuição de  $Z$ , ou seja,  $P[Z = k]$ , para  $k = 0, \dots, n$ . Que distribuição é esta?
3. Considere que o dado será jogado até que um número primo seja obtido. Seja  $Y_i$  a indicadora da primalidade da  $i$ -ésima rodada, para  $i = 1, \dots$ , e defina  $Z = \min\{i | Y_i = 1\}$ . Repare que  $Z$  denota o número de vezes que o dado é jogado até que o resultado seja um número primo. Determine a distribuição de  $Z$ , ou seja  $P[Z = k]$ , para  $k = 1, \dots$ . Que distribuição é esta?

**Questão 4: Cobra**

Considere três imagens tiradas em uma floresta,  $I_1$ ,  $I_2$ , e  $I_3$ . Em apenas uma das imagens existe uma pequena cobra. Ao inspecionar as imagens por poucos segundos, você forma uma intuição de onde a cobra deve estar. Ou seja, a probabilidade de encontrar a cobra na imagem  $I_i$  depois da rápida inspeção, dado que a cobra está nesta imagem, é  $\alpha_i$ . Suponha que você não encontre a cobra na imagem  $I_1$  depois da rápida inspeção. Qual é a probabilidade da cobra estar na imagem  $I_i$ ? Dica: defina eventos apropriados e use regra de Bayes!

**Questão 5: Sem memória**

Seja  $X \sim Geom(p)$  uma variável aleatória Geométrica com parâmetro  $p$ . Mostre que a distribuição geométrica não tem memória. Ou seja dado que  $X > k$ , o número de rodadas adicionais até que o resultado seja positivo possui a mesma distribuição (dica: formalize esta afirmação).

**Questão 6: Ônibus**

Considere que o processo de chegada do ônibus 485 no ponto do CT seja bem representado por um processo de Poisson. Ou seja,  $X \sim Poi(\lambda, t)$  denota o número (aleatório) de ônibus que chegam ao ponto em um intervalo de tempo  $t$  com taxa média de chegada igual a  $\lambda$ . Assuma que  $\lambda = 10$  ônibus por hora.

1. Determine a probabilidade de não chegar nenhum ônibus em um intervalo de 30 minutos.
2. Determine a probabilidade de 3 ônibus chegarem dentro de um intervalo de 5 minutos.
3. Determine a probabilidade da média ocorrer, ou seja, de chegarem exatamente 10 ônibus em uma hora.

**Questão 7: Propriedades**

Seja  $X$  e  $Y$  duas variáveis aleatórias discretas. Mostre as seguintes equivalências:

1.  $E[X] = E[E[X|Y]]$ , conhecida como regra da torre da esperança.
2.  $Var[X] = E[X^2] - E[X]^2$ .

**Questão 8: Caras em sequência \***

Considere uma moeda enviesada, tal que o probabilidade do resultado ser cara é  $p$  (e coroa  $1 - p$ ). Considere o número de vezes que a moeda precisa ser jogada para obtermos  $k$  caras consecutivas. Seja  $N_k$  a variável aleatória que denota esta quantidade. Qual é o numero médio de vezes que a moeda precisa ser jogada para obtermos  $k$  caras consecutivas, ou seja, qual é o valor esperado de  $N_k$ ? Dica: use a regra da torre da esperança.