

# Algoritmos de Monte Carlo e Cadeias de Markov – CPS 767

## 2019/1

Prof. Daniel R. Figueiredo

### Segunda Lista de Exercícios

**Dica:** Para ajudar no processo de aprendizado responda às perguntas integralmente, mostrando o desenvolvimento das respostas.

#### Questão 1: Cauda do dado em ação

Considere um icosaedro (um sólido Platônico de 20 faces) honesto, tal que a probabilidade associada a cada face é  $1/20$ . Considere que o dado será lançado até que um número primo seja obtido, e seja  $Z$  a variável aleatória que denota este número. Responda às perguntas abaixo:

1. Determine a distribuição de  $Z$ , ou seja  $P[Z = k], k = 1, 2, \dots$ . Que distribuição é esta?
2. Utilize a desigualdade de Markov para calcular um limitante para  $P[Z \geq 10]$ .
3. Utilize a desigualdade de Chebyshev para calcular um limitante para  $P[Z \geq 10]$ .
4. Calcule o valor exato de  $P[Z > 10]$  (dica: use probabilidade complementar). Compare os valores obtidos.

#### Questão 2: Cauda do dado em ação 2

Considere um icosaedro (um sólido Platônico de 20 faces) honesto, tal que a probabilidade associada a cada face é  $1/20$ . Considere que o dado será lançado  $n$  vezes, e seja  $Z$  a variável aleatória que denota o número de vezes que o resultado do dado foi um múltiplo de seis. Responda às perguntas abaixo:

1. Determine a distribuição de  $Z$ , ou seja  $P[Z = k], k = 0, 1, \dots, n$ . Que distribuição é esta?
2. Seja  $n = 1000$ , utilize a desigualdade de Chebyshev para calcular um limitante para  $P[Z > 300]$ .
3. Seja  $n = 1000$ , utilize a desigualdade de Chernoff para calcular um limitante para  $P[Z > 300]$ .
4. Seja  $n = 1000$ , calcule o valor exato para  $P[Z > 300]$ . Compare os valores obtidos.
5. Determine o valor  $z$  em função de  $n$  tal que  $Z \leq z$  whp (*with high probability*).

#### Questão 3: Pesquisa

Você leu no jornal que uma pesquisa com 1500 pessoas indicou que 40% dos entrevistados preferem o candidato  $A$  enquanto 60% preferem o candidato  $B$ . Estime a margem de erro desta pesquisa usando uma confiança de 90%. O que você precisa assumir? (dica: use a lei dos grandes números).

#### Questão 4: Moedas

Você tem duas moedas: uma honesta e outra enviesada que produz cara com probabilidade  $3/4$ . Uma das duas moedas é escolhida aleatoriamente e lançada  $n$  vezes. Seja  $S_n$  o número de caras que foram observadas nas  $n$  jogadas. Responda às perguntas abaixo:

1. A lei dos grandes números pode ser aplicada para prever a fração de caras que será observada?
2. Podemos determinar qual moeda foi escolhida, depois da mesma ser lançada um número  $n$  grande?

3. Determine o valor de  $n$  tal que tenhamos 95% de chance de acertar qual moeda foi escolhida.

### Questão 5: Sanduíches

Você convidou 64 pessoas para uma festa e agora precisa preparar sanduíches para os convidados. Você acredita que cada convidado irá comer 0, 1 ou 2 sanduíches com probabilidades  $1/4$ ,  $1/2$  e  $1/4$ , respectivamente. Assuma que o número de sanduíches que cada convidado irá comer é independente de qualquer outro convidado. Quantos sanduíches você deve preparar para ter uma confiança de 95% de que não vai faltar sanduíches para os convidados?

### Questão 6: Vértices isolados

Considere o modelo de grafo aleatório de Erdős-Rényi (também conhecido por  $G(n, p)$ ), onde cada possível aresta de um grafo rotulado com  $n$  vértices ocorre com probabilidade  $p$ , independentemente. Responda às perguntas abaixo:

1. Determine a distribuição do grau do vértice 1 (em função de  $n$  e  $p$ )?
2. Determine a probabilidade do vértice 1 não ter arestas incidentes, ou seja, estar isolado.
3. Determine o valor esperado do número de vértices isolados no grafo (dica: use v.a. indicadora).
4. Mostre que se  $p = (1 + \epsilon) \log n/n$ , para qualquer  $\epsilon > 0$ , o modelo  $G(n, p)$  não possui vértices isolados, whp. (dica: use método do primeiro momento).