Algoritmos de Monte Carlo e Cadeias de Markov – CPS 767 2019/1

Prof. Daniel R. Figueiredo

Quarta Lista de Exercícios

Dica: Para ajudar no processo de aprendizado responda às perguntas integralmente, mostrando o desenvolvimento das respostas.

Questão 1: Modelando uma rede sem fio
Considere o seguinte mecanismo simplificado de acesso ao meio compartilhado, empregado por um protocolo de enlace de uma rede sem fio. Neste mecanismo, o tempo é discretizado em intervalos. Cada estação (ou dispositivo) conectado à rede sem fio está sempre em um de três possíveis estados: *Pronto* (P), *Colisão 1* (C_1), ou *Colisão 2* (C_2). No estado P, uma estação transmite em um determinado intervalo de tempo com probabilidade p_0, independente de qualquer outro evento. Se uma colisão ocorrer (ou seja, mais de estação transmitir neste intervalo), a estação passa para o estado C_1. No estado C_1, uma estação transmite em um determinado intervalo com probabilidade p_1, independente de qualquer outro evento. Se a transmissão for bem sucedida (não ocorrer uma colisão), a estação passa para o estado P. Caso ocorra uma colisão, a estação passa para o estado C_2. Caso contrário (se não transmitir), a estação permanece no mesmo estado. No estado C_2, uma estação transmite com probabilidade p_2, independentemente. Se ocorrer uma colisão ou se a estação não transmitir, ela permanece no mesmo estado. Caso a transmissão seja bem sucedida, a estação passa para o estado P.

1. Considere um sistema com duas estações. Construa uma cadeia de Markov para este sistema, determinando as variáveis de estado e as transições entre os estados (desenha o grafo que representa a cadeia).
2. Determine a matriz de transição de probabilidade em função dos parâmetros do sistema.
3. Encontre a distribuição estacionária da cadeia de Markov.
4. Determine a vazão média do sistema. Ou seja, a fração de intervalos de tempo em que o sistema produz uma transmissão com sucesso.
5. Determine a ociosidade média do sistema. Ou seja, a fração de intervalos de tempo em que o sistema não transmite.

Questão 2: Passeios aleatórios enviesados
Considere um grafo não direcionado $G = (V, E)$ com peso nas arestas, tal que $w_{ij} > 0$ para toda aresta $(i, j) \in E$. Considere um andarilho aleatório que caminha por este grafo em tempo discreto, mas cujos passos são enviesados pelos pesos das arestas. Em particular, a probabilidade do andarilho ir do vértice i para o vértice j é dado por w_{ij}/W_i, onde $W_i = sum_j w_{ij}$ (W_i é a soma dos pesos das arestas incidentes ao vértice $i \in V$). Temos assim um passeio aleatório enviesado pelos pesos das arestas.

1. Mostre que este passeio aleatório induz uma cadeia de Markov.
2. Determine a distribuição estacionária desta cadeia de Markov (dica: use o método do melhor chute).
3. Determine se esta cadeia de Markov é reversível no tempo.

Questão 3: Convergência de passeios aleatórios
Considere um passeio aleatório preguiçoso (com $p = 1/2$) caminhando sobre um grafo com $n = 1000$ vértices. Estamos interessados em entender a convergência da distribuição $\pi(t)$ para diferentes grafos. Assuma que o passeio sempre inicia sua caminhada no vértice 1, ou seja, $\pi_1(0) = 1$. Considere os seguintes grafos: grafo em anel, árvore binária cheia, grafo em reticulado com duas dimensões (grid 2D).

1. Para cada grafo, construa analiticamente a matriz de transição de probabilidade (ou seja, determine P_{ij} para todo vértice i, j do grafo).

2. Determine analiticamente a distribuição estacionária para cada grafo (ou seja, determine π_i para cada vértice i do grafo).

3. Para cada grafo, calcule a variação total entre $\pi(t)$ e a distribuição estacionária, em função de t. Trace um gráfico com todos os grafos(preferencialmente em escala $\log - \log$).

4. O que você pode concluir sobre a convergência em função da estrutura do grafo?

Questão 4: Tempo de mistura de passeios aleatórios
Considere os passeios aleatórios preguiçosos da questão anterior, e assuma que $\epsilon = 10^{-4}$. Para cada grafo, determine o tempo de mistura, τ_n (com ϵ fixo) para grafos de diferentes tamanhos, dado por n. Em particular, considere $n = \{10, 50, 100, 300, 700, 1000, 3000, 5000, 10000\}$. Desenhe um único gráfico de n versus τ_n para todos os grafos. O que você pode concluir sobre o tempo de mistura em função da estrutura do grafo?

Questão 5: Reduzindo espaço de estados
Considere um sistema composto por n usuários onde cada usuário pode estar em um de dois possíveis estados, por exemplo "falando"ou "ouvindo", "ligado"ou "desligado". Em cada intervalo de tempo, cada usuário possivelmente transiciona de um estado para outro, com probabilidade $p < 1$ e $q < 1$, respectivamente. Assuma que os usuários são estatisticamente idênticos e mutuamente independentes.

1. Construa uma cadeia de Markov baseando-se no modelo On-Off para representar este sistema. Dica: comece com $n = 2$ e depois generalize.

2. Quantos estados possui esta cadeia, em função de n?

3. Considere que estamos interessados apenas em medidas de interesse agregadas, que não individualiza os usuários. Por exemplo, a distribuição do número de usuários em um dos estados, $P[F(t) = k]$, $k = 0, \ldots, n$ onde $F(t)$ é o número de usuários "falando"no tempo t. Construa uma outra cadeia de Markov para representar este sistema.

4. Quantos estados possui esta nova cadeia, em função de n? Qual foi o ganho com relação ao modelo anterior?