

Algoritmos de Monte Carlo e Cadeias de Markov – CPS 767

2019/1

Prof. Daniel R. Figueiredo

Quinta Lista de Exercícios

Dica: Para ajudar no processo de aprendizado responda às perguntas integralmente, mostrando o desenvolvimento das respostas.

Questão 1: Passeios e caminhos

Considere um grafo com n vértices e um passeio aleatório sobre o mesmo.

1. Considerando que o grafo é um anel, determine a probabilidade do seguinte caminho amostral: $X_0 = 1, X_1 = 2, \dots, X_{n-1} = n$.
2. Considerando que o grafo é um grafo completo, determine a probabilidade do mesmo caminho amostral: $X_0 = 1, X_1 = 2, \dots, X_{n-1} = n$.
3. Considere outro caminho amostral qualquer, e calcule a probabilidade do mesmo em cada um dos casos acima. O que você pode concluir?

Questão 2: Hardcore com Metropolis-Hasting

Considere o modelo Hardcore, onde cada vértice de um grafo qualquer está associado ao valor 0 ou 1 tal que um vértice com valor 1 necessariamente tem todos seus vizinhos com valor 0.

1. Construa uma cadeia de Markov irredutível e aperiódica que tenha transições simples de calcular entre os possíveis estados do modelo. Por exemplo, o número de transições de saída de um estado deve ser no máximo o número de vértices da rede.
2. Aplique o método de Metropolis-Hasting na CM acima tal que a distribuição estacionária da nova cadeia seja uniforme. Calcule as probabilidades de transição desta nova cadeia.
3. Compare as probabilidades de transição do modelo acima com a cadeia construída com o Gibbs Sampling (visto em aula). Elas são idênticas?

Questão 3: Amostrando triângulos

Considere um grafo conexo qualquer. Desejamos gerar amostras de triângulos deste grafo (cliques de tamanho 3), tal que todo triângulo tem igual probabilidade de ser amostrado. Ou seja, distribuição uniforme sobre o conjunto de triângulos do grafo. Utilize o método de Metropolis-Hasting para resolver este problema. Determine os estados de sua CM, as transições originais da cadeia (que deve ser irredutível e aperiódica), e as transições da cadeia modificada pelo método Metropolis-Hasting.

Questão 4: Quebrando o código

Você encontrou uma mensagem que foi cifrada com a código da substituição (neste código, cada letra é mapeada em outra letra, unicamente). Você deseja encontrar a chave do código para ler a mensagem. Repare que a chave é um mapeamento σ entre as letras, por exemplo $\sigma(a) = x, \sigma(b) = h, \sigma(c) = e, \dots$. Considere uma função $f : \Omega \rightarrow [0, 1]$ que avalia a sua capacidade de entender a mensagem dado um mapeamento $\sigma \in \Omega$. Repare que $f(\sigma) = 1$ se você consegue entender a mensagem ao decifrá-la com o mapeamento σ , e $f(\sigma) = 0$ se o mapeamento σ não te ajuda em nada a entender a mensagem. Utilize o método de *Simulated Annealing* para resolver este problema.