

Aula 8

Aula passada

- Gerando amostras de v.a. discretas
- Gerando Geométrica
- Método da transformada inversa
- Gerando Binomial
- Gerando permutações

Aula de hoje

- Método da rejeição (*rejection sampling*)
- Exemplos
- *Importance Sampling*
- Exemplos
- Generalização

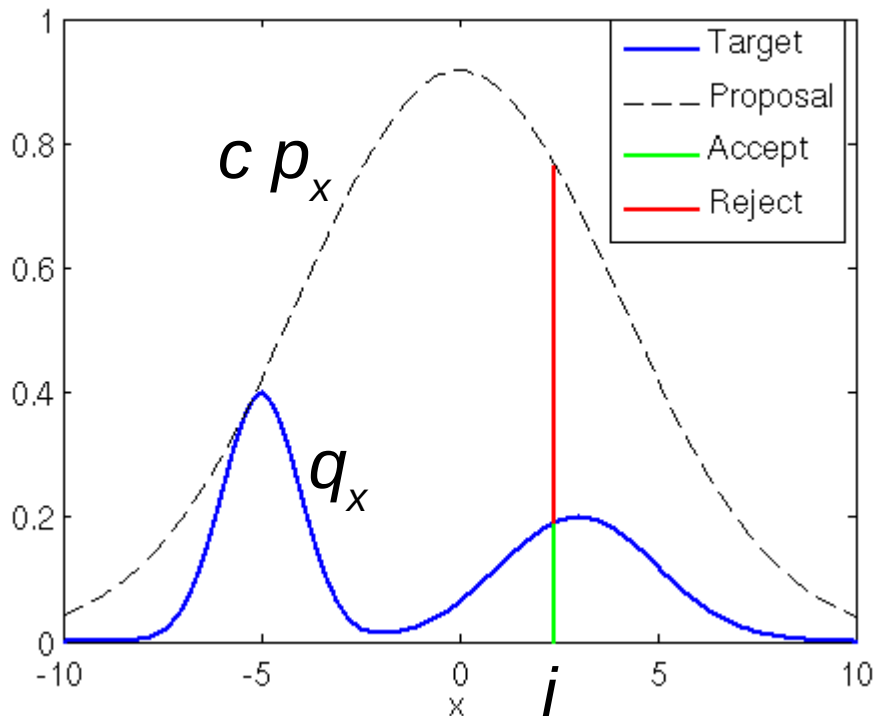
Rejection Sampling

- Técnica fundamental para geração de amostras aleatórias
 - usada em Markov Chain Monte Carlo (veremos depois)
- **Ideia:** usar distribuição conhecida para gerar amostras de outra distribuição, mais complicada
- Sejam X e Y duas v.a. com distribuições p_x e q_x , definidas no mesmo suporte
 - $p_x = P[X = x]$, $q_x = P[Y = x]$
- Assuma que $q_x \leq c p_x$ para alguma constante c e todo x
 - ou seja, $c p_x$ é uma *função envelope* para q_x
- Supor que sabemos gerar amostras para v.a. X
 - ex. método da transformada inversa
- Como usar isto para gerar amostras para v.a. Y ?

Rejection Sampling

- Algoritmo (proposto por von Neumann)
 - 1) Gerar valor para i a partir de p_x
 - 2) Gerar u uniforme(0, $c p_i$) contínua, usando o i gerado
 - 3) Se $u < q_i$, retorna i , caso contrário vai para 1)

- Graficamente



- Algoritmo pode *rejeitar* amostra gerada de X várias vezes
 - *rejection sampling*
- Rejeita com probabilidade proporcional a diferença de p_x e q_x

Rejection Sampling Funciona

- Mostrar que algoritmo funciona
 - ou seja, algoritmo gera amostra i com probabilidade q_i

- Considere um valor i e o evento *aceitar*

$$P[X=i, \textit{aceitar}] = P[X=i] P[\textit{aceitar} \mid X=i] = p_i q_i / (c p_i) = q_i / c$$

- Probabilidade de aceitar (por prob. total)

$$P[\textit{aceitar}] = \sum_i P[X=i, \textit{aceitar}] = \sum_j \frac{q_j}{c} = \frac{1}{c}$$

- Ao final de cada rodada, algoritmo aceita com prob. $1/c$

- Temos então

$$P[X=i \mid \textit{aceitar}] = \frac{P[X=i, \textit{aceitar}]}{P[\textit{aceitar}]} = q_i = P[Y=i]$$

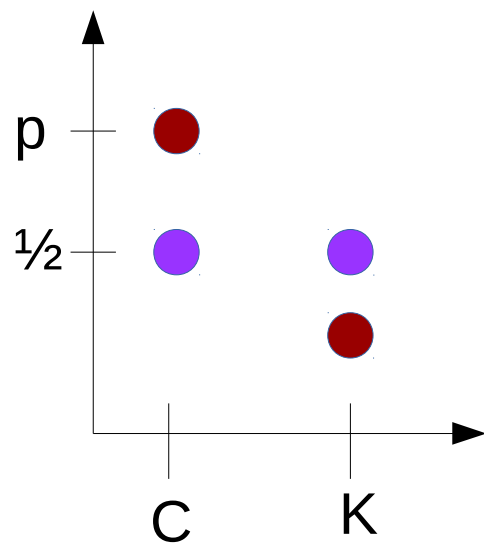
Rodadas de *Rejection Sampling*

- A cada rodada, algoritmo aceita com prob. $1/c$
- Número de rodadas até aceitar é aleatório. Distribuição?
 - Geométrica com parâmetro $1/c$
 - valor esperado = c
 - complexidade de caso médio para cada amostra
- Escolha do valor para c é muito importante
 - menor valor tal que $q_x \leq c p_x$ para todo x
- Valor depende da “distância” entre q_x e p_x
 - se muito diferentes, pode demandar c muito grande

**Técnica funciona também
com v.a. contínua**

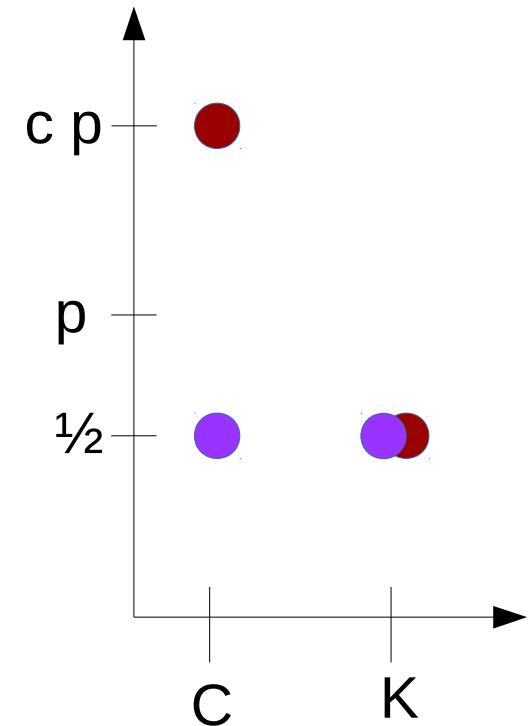
Exemplo

- Dado moeda enviesada, cara com prob $p > 1/2$
- Como gerar moeda sem viés?



- Moeda enviesada
- Moeda honesta

- Encontrar constante c tal que $q_x \leq c p_x$
- $c(1-p) = 1/2 \rightarrow c = 1/(2(1-p))$



- 1) Gerar valor para $i = \{C, K\}$ a partir de p_x (moeda enviesada)
- 2) Gerar u uniforme(0, $c p_i$) contínua, usando o i gerado
- 3) Se $u < q_i$, retorna i , caso contrário vai para 1)

Exemplo 2

- Gerar amostras da v.a. Y contínua com densidade $f_Y(x) = 20x(1-x)^3$, $0 < x < 1$
 - Usando método da rejeição. Que distribuição proponente?
 - uniforme $[0,1]$, $g_x(x) = 1$, $0 < x < 1$
 - Determinar c tal que $f(x) \leq c g(x)$ para $0 < x < 1$
 - **Ideia:** encontrar máximo de $f(x)/g(x)$
 - derivar, igualar a zero, resolver para x , encontrar valor
 - máximo em $x = 1/4$, $c = 135/64$
- 1) Gerar valor para x a partir de $g(x)$ (uniforme $[0,1]$)
 - 2) Gerar u uniforme $(0, c g(x))$ contínua, usando o x gerado
 - 3) Se $u < f(x)$, retorna x , caso contrário vai para 1)

Cenário Problemático

- Algoritmo de Monte Carlo é estimador universal
 - média amostral converge para valor esperado
- **Problema:** variância do estimador pode ser muito alta!
 - muitas, muitas amostras serão necessárias
- Exemplo

$$G_N = \sum_{i=1}^N g(i) \quad M_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(X_i) \quad , \quad X_i \sim \text{Unif}(1, N)$$

- $g(i)$ é pequena (ou zero) para muitos valores de i , e grande para poucos valores
- Teremos que gerar muitas amostras para “acertar” os valores importantes de $g(i)$
- Ideias para atacar o problema?

Importance Sampling

- Amostrar com probabilidade diferente da original
 - uniforme no exemplo anterior
- Amostrar com maior probabilidade região mais importante para o problema em questão
 - *importance sampling*
- Compensar pelo aumento desta probabilidade
- Usar método de Monte Carlo em problema reformulado
 - com novas funções de distribuição
- **Objetivo:** reduzir a variância do estimador
 - isto nem sempre ocorre, pois se exagerar demais vai ter que compensar com mais amostras!
 - técnica tem que ser usada com cuidado

Importance Sampling

- Seja X uma v.a. uniforme(1,N)

$$E[g(X)] = \sum_{i=1}^N P[X=i]g(i) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N g(i) = \frac{G_N}{N}$$

- Seja Y v.a. com distribuição dada por $h(i) > 0$ para todo i

$$E_h \left[\frac{g(Y)}{h(Y)} \right] = \sum_{i=1}^N \frac{g(i)}{h(i)} h(i) = \sum_{i=1}^N g(i) = G_N$$

- Podemos estimar G_N estimando o valor esperado através da média amostral
 - Monte Carlo aplicado a outro valor esperado
- Usar h para reduzir variância!

Importance Sampling

- Seja Y_i uma sequência iid de v.a. com distribuição $h(i)$

$$M_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{g(Y_i)}{h(Y_i)}$$

- Média e variância do novo estimador

$$E_h[M_n] = E_h \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{g(Y_i)}{h(Y_i)} \right] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E_h \left[\frac{g(Y_i)}{h(Y_i)} \right] = G_N$$

$$\text{Var}_h[M_n] = \frac{\sigma_{g/h}^2}{n} \quad \longleftarrow \text{Variância da v.a. } g(Y)/h(Y)$$

- M_n converge para $E_h[g(Y) / h(Y)] = G_N$
- Variância do estimador depende da variância de $g(Y)/h(Y)$

Variância da Nova v.a.

- Temos $g(Y)/h(Y)$, onde Y possui distribuição h , com $h_i > 0$ para todo i

$$\sigma_{g/h}^2 = \text{Var}_h \left[\frac{g(Y)}{h(Y)} \right] = E_h \left[\left(\frac{g(Y)}{h(Y)} \right)^2 \right] - E_h \left[\frac{g(Y)}{h(Y)} \right]^2$$

$= G_N$

- Segundo momento

$$E_h \left[\left(\frac{g(Y)}{h(Y)} \right)^2 \right] = \sum_{i=1}^N \left(\frac{g(i)}{h(i)} \right)^2 h(i) = \sum_{i=1}^N \frac{g(i)^2}{h(i)}$$

- $E_h[g(Y)/h(Y)]$ não depende de h , mas segundo momento depende
 - variância de M_n depende apenas do segundo momento

Exemplo

- Dado N , calcular $G_N = \sum_{i=1}^N g(i)$ onde $g(i) = i \log i$
- Seja Y_i seq iid de v.a. com distribuição $h(i) > 0$ para todo i
- **Opção 1:** $h(i) = 1/N$ para todo i , ou seja, $h(i)$ é uniforme(1,N)
 - o que temos feito até agora
- Segundo momento?

$$\sum_{i=1}^N \frac{g(i)^2}{h(i)} = N \sum_{i=1}^N g(i)^2 = N \sum_{i=1}^N i^2 \log^2 i$$

- Como reduzir segundo momento?
- **Ideia:** escolher $h(i)$ proporcionalmente a $g(i)$
 - maiores valores tem maior probabilidade (com cuidado)

Exemplo

- **Opção 2:** $h(i) = i / K_2$, ou seja linearmente proporcional a i
 - onde $K_2 = 1+2+\dots+N = N(N+1)/2$

- Segundo momento?

$$\sum_{i=1}^N \frac{g(i)^2}{h(i)} = K_2 \sum_{i=1}^N \frac{g(i)^2}{i} = K_2 \sum_{i=1}^N i \log^2 i$$

- **Opção 3:** $h(i) = i^3 / K_3$, ou seja cúbica em i
 - onde $K_3 = 1^3+2^3+\dots+N^3 = N^2(1 + N)^2/4$

$$\sum_{i=1}^N \frac{g(i)^2}{h(i)} = K_3 \sum_{i=1}^N \frac{g(i)^2}{i^3} = K_3 \sum_{i=1}^N \frac{\log^2 i}{i}$$

Exemplo

- Qual é a melhor opção?
- A que tiver menor variância (ou menor segundo momento)
- Com $N=1000$, vamos calcular!

Opção 1

$$E_h \left[\left(\frac{g(Y)}{h(Y)} \right)^2 \right] = 1.44 \times 10^{13}$$

Opção 2

$$E_h \left[\left(\frac{g(Y)}{h(Y)} \right)^2 \right] = 1.03 \times 10^{13}$$

Opção 3

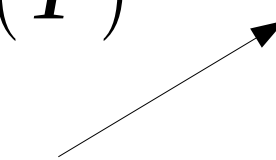
$$E_h \left[\left(\frac{g(Y)}{h(Y)} \right)^2 \right] = 2.75 \times 10^{13}$$

- Melhor estimador é a **opção 2** (menor variância)
 - significa menos amostras para um mesmo erro
 - ou menos erro para um mesmo número de amostras
- Qual seria a melhor $h(i)$ possível?

O Melhor $h(i)$ Possível

- $h(i)$ que induz variância zero é o melhor possível!

$$\sigma_{g/h}^2 = E_h \left[\left(\frac{g(Y)}{h(Y)} - \mu_{g/h} \right)^2 \right] = \sum_{i=1}^N \left(\frac{g(i)}{h(i)} - \mu_{g/h} \right)^2 h(i)$$


$$E[g(Y)/h(Y)] = G_N$$

- Se $\frac{g(i)}{h(i)} = \mu_{g/h}$ para todo i , então variância é zero!
- A princípio, podemos escolher qualquer $h(i)$. Qual o problema então?
- Precisamos saber $\mu_{g/h}$ que é justamente o que queremos estimar!
- **Ideia:** tentar aproximar esta relação com heurísticas

Generalização

- Supor que queremos calcular um determinado valor esperado, onde X tem distribuição dada por f

$$\mu_f = E_f [g(X)] = \sum_i g(i) f(i)$$

- Podemos aplicar *Importance Sampling* neste problema
 - amostrar mais regiões mais importantes para g
- Seja h outra distribuição para v.a. X , tal que $f(i) > 0 \rightarrow h(i) > 0$

$$\mu_f = \sum_i \frac{g(i) f(i)}{h(i)} h(i) = E_h \left[\frac{g(X) f(X)}{h(X)} \right]$$

- Temos um outro valor esperado E_h que pode ser estimado
 - X em E_h tem distribuição h
- Podemos reduzir variância escolhendo h

Generalização 2

- Tudo vale para o caso de v.a. contínua
 - trocar distribuição por densidade, somatório por integral
- Muitas aplicações no caso contínuo
 - *Monte Carlo Ray Tracing* não funciona sem *Importance Sampling*
 - Espaço de integração é muito grande para uniforme dar bons resultados
 - Muitas heurísticas são usadas nesta aplicação
- **Outro uso:** estimar eventos de baixa probabilidade
 - $E[I(\text{evento } A)] = p_A$, onde A é evento de interesse
 - Mesma ideia, reduzir variância do estimador, aumentar amostragem do evento de interesse