Algoritmos de Monte Carlo e Cadeias de Markov – CPS 767 2020/1

Prof. Daniel R. Figueiredo

Segunda Lista de Exercícios

Dica: Para ajudar no processo de aprendizado responda às perguntas integralmente, mostrando o desenvolvimento das respostas.

Questão 1: Cauda do dado em ação
Considere um icosaedro (um sólido Platônico de 20 faces) honesto, tal que a probabilidade associada a cada face é 1/20. Considere que o dado será lançado até que um número primo seja obtido, e seja Z a variável aleatória que denota este número. Responda às perguntas abaixo:

1. Determine a distribuição de Z, ou seja $P[Z = k], k = 1, 2, \ldots$. Que distribuição é esta?
2. Utilize a desigualdade de Markov para calcular um limitante para $P[Z \geq 10]$.
3. Utilize a desigualdade de Chebyshev para calcular um limitante para $P[Z \geq 10]$.
4. Calcule o valor exato de $P[Z > 10]$ (dica: use probabilidade complementar). Compare os valores obtidos.

Questão 2: Cauda do dado em ação 2
Considere um icosaedro (um sólido Platônico de 20 faces) honesto, tal que a probabilidade associada a cada face é 1/20. Considere que o dado será laçado n vezes, e seja Z a variável aleatória que denota o número de vezes que o resultado do dado foi um múltiplo de seis. Responda às perguntas abaixo:

1. Determine a distribuição de Z, ou seja $P[Z = k], k = 0, 1, \ldots, n$. Que distribuição é esta?
2. Seja $n = 1000$, utilize a desigualdade de Chebyshev para calcular um limitante para $P[Z > 300]$.
3. Seja $n = 1000$, utilize a desigualdade de Chernoff para calcular um limitante para $P[Z > 300]$.
4. Seja $n = 1000$, calcule o valor exato para $P[Z > 300]$. Compare os valores obtidos.
5. Determine o valor z em função de n tal que $Z \leq z$ whp (*with high probability*).

Questão 3: Pesquisa
Você leu no jornal que uma pesquisa com 1500 pessoas indicou que 40% dos entrevistados preferem o candidato A enquanto 60% preferem o candidato B. Estime a margem de erro desta pesquisa usando uma confiança de 90%. O que você precisa assumir? (dica: use a lei dos grandes números).

Questão 4: Moedas
Você tem duas moedas: uma honesta e outra enviesada que produz cara com probabilidade 3/4. Uma das duas moedas é escolhida aleatoriamente e lançada n vezes. Seja S_n o número de caras que foram observadas nas n jogadas. Responda às perguntas abaixo:

1. A lei dos grandes números pode ser aplicada para prever a fração de caras que será observada?
2. Podemos determinar qual moeda foi escolhida, depois da mesma ser lançada um número n grande?

3. Determine o valor de n tal que tenhamos 95% de chance de acertar qual moeda foi escolhida.

Questão 5: Sanduíches

Você convidou 64 pessoas para uma festa e agora precisa preparar sanduíches para os convidados. Você acredita que cada convidado irá comer 0, 1 ou 2 sanduíches com probabilidades 1/4, 1/2 e 1/4, respectivamente. Assuma que o número de sanduíches que cada convidado irá comer é independente de qualquer outro convidado. Quantos sanduíches você deve preparar para ter uma confiança de 95% de que não vai faltar sanduíches para os convidados?

Questão 6: Vértices isolados

Considere o modelo de grafo aleatório de Erdös-Rényi (também conhecido por $G(n, p)$), onde cada possível aresta de um grafo rotulado com n vértices ocorre com probabilidade p, independentemente. Responda às perguntas abaixo:

1. Determine a distribuição do grau do vértice 1 (em função de n e p)?
2. Determine a probabilidade do vértice 1 não ter arestas incidentes, ou seja, estar isolado.
3. Determine o valor esperado do número de vértices isolados no grafo (dica: use v.a. indicadora).
4. Mostre que se $p = (1 + \epsilon) \log n/n$, para qualquer $\epsilon > 0$, o modelo $G(n, p)$ não possui vértices isolados, whp. (dica: use método do primeiro momento).