Aula 3

Roteiro

- Sequência de v.a.
- Distribuição binomial, geométrica, zeta
- Valor esperado
- Variância
- Distribuição conjunta
- Independência de v.a.
- Valor esperado condicional
- Espaço amostral contínuo, função densidade

Sequência de V.A.

- Considere uma sequência de *n* v.a.

  $$X_{1,}\ X_{2,} \ldots ,\ X_n$$

- Dizemos que a sequência é i.i.d. (independente e identicamente distribuída) se
  - v.a. são independentes (aos pares)
  - v.a. possuem a mesma função de distribuição
- Exemplos de sequências iid
  - modelo de um mesmo dado jogado *n* vezes: X_i é o valor do dado na *i*-ésima jogada

Distribuição Binomial

- Considere uma sequência iid de *n* v.a. de Bernoulli

$$X_{1,}\, X_{2,} \ldots, X_n$$

  - onde X_i ~ Bernoulli(*p*) para *i* = 1,2, …, *n*
  - $X_i = 0$ ou $X_i = 1$
- Espaço amostral: todas sequências binárias de tamanho *n*
- Seja *Z* a soma destas v.a.

$$Z=\sum_{i=1}^{n} X_i$$

- *Z* pode assumir os possíveis resultados da soma, ou seja um valor no intervalo [0, n]
- *Z* possui distribuição Binomial, com parâmetros *n* e *p*
  - *Z* ~ Bin(*n*, *p*)

Distribuição Binomial

- Qual a expressão para a distribuição Binomial?
  - probabilidade da soma ser igual a *i*

$$f_Z(i)=P[Z=i]$$

- Quanto vale?

$$f_Z(i)=P[Z=i]=\binom{n}{i}p^i(1-p)^{n-i}$$

- Podemos obter expressão a partir de princípios elementares
  - ver exercício da lista
- Exemplos
  - número de caras ao jogar uma moeda 20 vezes
  - número de resultados pares ao jogar um dado 10 vezes

Distribuição Geométrica

- Considere uma sequência iid de Bernoulli

  $X_{1,}\ X_{2,}\ldots$

  - onde X_i ~ Bernoulli(p) para i = 1,2,…

- Seja Z o menor valor tal que $X_Z = 1$

  - posição do primeiro valor 1 da sequência

  $$Z = min\{i | X_i = 1\}$$

- Z possui distribuição Geométrica, com parâmetro p
  - $Z \sim \text{Geo}(p)$
- Z pode assumir os possíveis valores para o mínimo, ou seja [1, 2, ...]

Distribuição Geométrica

- Qual a expressão para a distribuição Geométrica?

$$f_Z(i) = P[Z = i] = (1-p)^{i-1} p \,, i = 1,2,\ldots$$

- Para ser função de probabilidade, precisamos

$$\sum_{i>0} f_Z(i) = 1 \quad \longleftarrow \quad \text{Verificar!}$$

- Podemos obter expressão a partir de princípios elementares
  - ver exercício da lista
- Exemplos
  - número de vezes que moeda é jogada até primeira cara
  - número de elementos inseridos em tabela *hash* até colisão com elemento em uma posição fixa

Distribuição Zeta

- Seja *Z* uma v.a. com distribuição Zeta com parâmetro *s* > *1*

$$f_Z(i) = P[Z=i] = \frac{C(s)}{i^s}, i = 1,2,\ldots$$

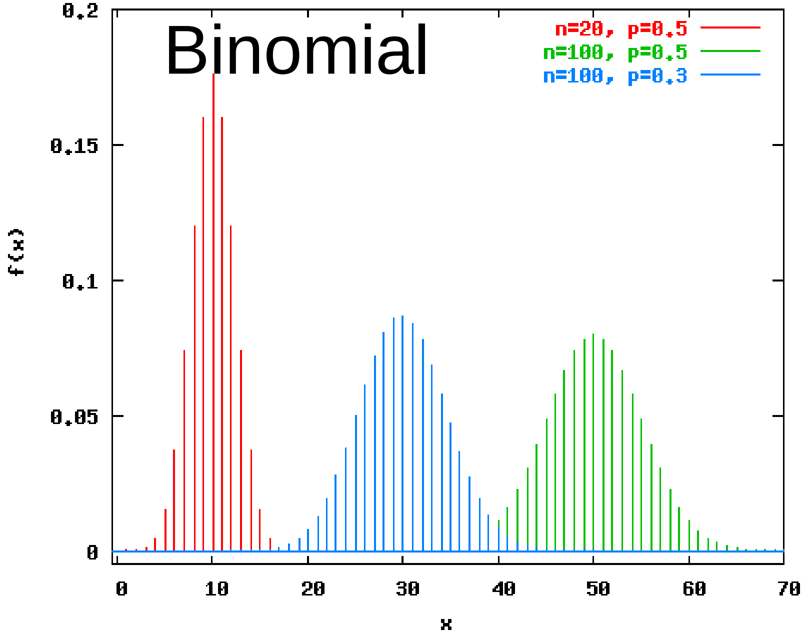
  - onde *C*(*s*) é a constante de normalização
    - conhecida por função *zeta* de Riemann

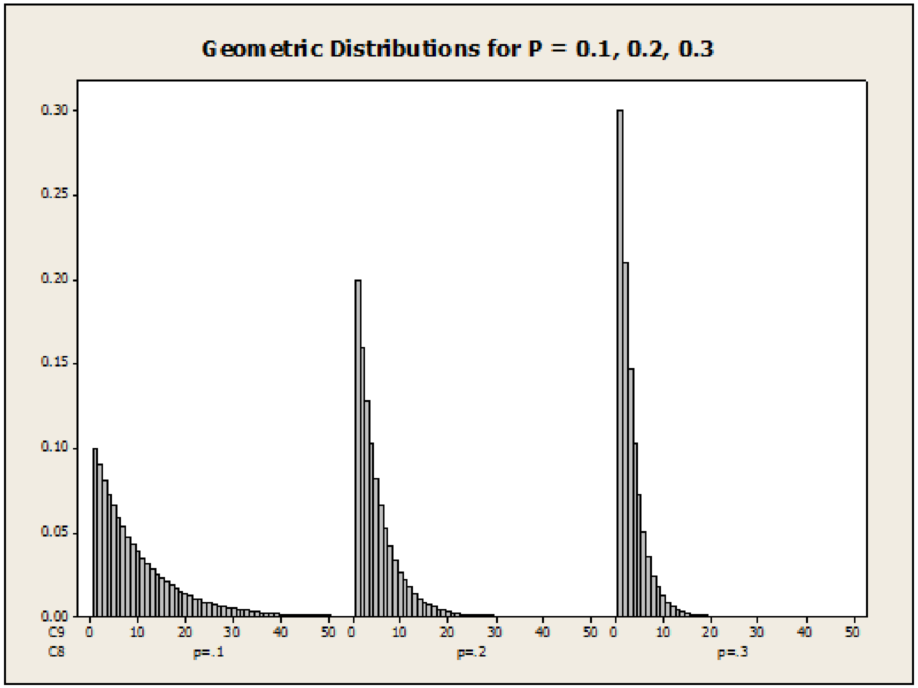
$$\sum_{i>0} \frac{1}{i^s} = \frac{1}{C(s)} \longleftarrow \text{Definida para todo s > 1}$$

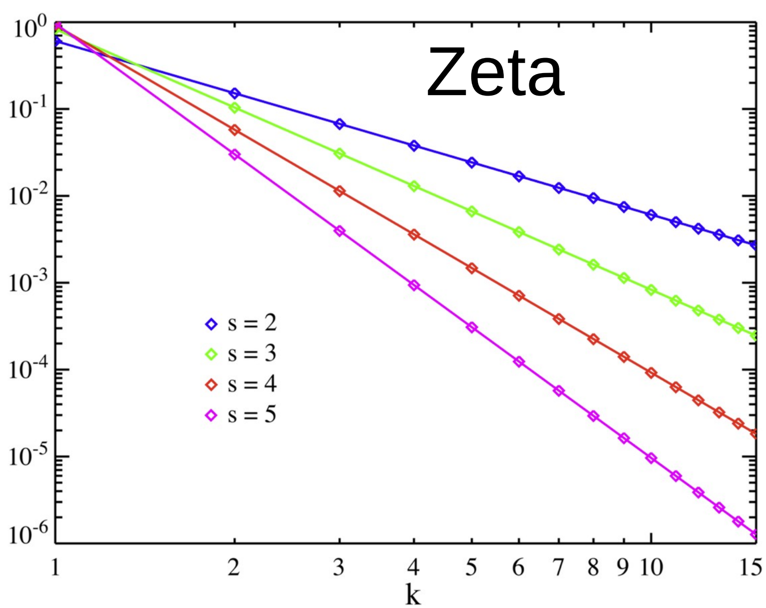
- Zeta é uma distribuição em lei de potência
  - *cauda pesada*: probabilidade decai bem mais devagar do que exponencial
- Exemplos
  - número de vezes que uma palavra ocorre na wikipedia
  - número de seguidores de um perfil no Twitter

Gráficos da Distribuições

- *“A picture is worth a thousand words”*







- Diferença fundamental entre funções
- Binomial é “simétrica”, Geométrica tem um “lado”, Zeta tem “cauda pesada”

Figueiredo 2023

Valor Esperado

- Função de probabilidade caracteriza por completo comportamento de uma v.a.
  - mas muitas vezes é desconhecida
- Resumo do comportamento de uma v.a.

Valor Esperado

$$\mu_X = E[X] = \sum_{i \in O_X} i f_X(i)$$

média ponderada dos valores que *X* pode assumir

- Não é aleatório (é simplesmente um número)
- Representa o comportamento médio da v.a.
- Cada distribuição tem o seu valor esperado

Exemplos de Valor Esperado

- X~Bernoulli(p) $\rightarrow$ E[X] = ?
  - aplicando definição: E[X] = 0*(1-p) + 1*p = p

- X~Bin(n,p) $\rightarrow$ E[X] = ? E[X] = np
- X~Geo(p) $\rightarrow$ E[X] = ? $\longrightarrow$ E[X] = 1/p
- X~Zeta(s) $\rightarrow$ E[X] = ? E[X] = C(s-1)/C(s), para s > 2

Função de v.a.

- Seja *g* uma função qualquer, tal que

$$g : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$$

- Seja *X* uma v.a., podemos aplicar *g* a *X*

$$g(X)$$

Define uma v.a. com imagem nos reais, mas ainda é discreta (enumerável)

- Valor esperado da função da v.a. (mesma definição)

$$E[g(X)] = \sum_{i \in O_X} g(i) f_X(i)$$

- Em geral, E[*g*(*X*)] != *g*(E[*X*])
  - valor esperado da função e função do valor esperado

Variância

- Outro resumo do comportamento de uma v.a.
- Medida de “dispersão” ao redor da média

$$g(X) = (X - \mu_X)^2$$ ← quadrado da diferença com o valor esperado

- Variância: valor esperado da função acima

$$\sigma_X^2 = Var[X] = E[g(X)] = E[(X - \mu_X)^2]$$

- Desvio padrão: raiz quadrada da variância

$$\sigma_X = \sqrt{Var[X]} = \sqrt{\sigma_X^2}$$

- Não é aleatório (é simplesmente um número)
- Representa a dispersão média da v.a.
- Cada distribuição tem a sua variância

Exemplos de Variância

- $X \sim$Bernoulli(p) $\rightarrow$ Var[X] = ?
  - aplicando definição: E[g(X)] = g(0)*(1-p) + g(1)*p = $(0 - p)^2$*(1-p) + $(1 - p)^2$*p = p(1-p)

- $X \sim$Bin(n,p) $\rightarrow$ Var[X] = ?
- $X \sim$Geo(p) $\rightarrow$ Var[X] = ?
- $X \sim$Zeta(s) $\rightarrow$ Var[X] = ?

$\longrightarrow$

Var[X] = $np(1-p)$

Var[X] = $(1-p)/p^2$

Var[X] = C(s-2)/C(s-1), para $s > 3$

Propriedades

- Linearidade da esperança (outro nome para valor esperado)

$$E[X+Y]=E[X]+E[Y]$$ muito usada!

- Seja *X* e *Y* duas v.a. independentes

$$E[XY]=E[X]E[Y]$$

$$Var[X+Y]=Var[X]+Var[Y]$$

- Seja $Y = aX + b$, para constantes *a*, *b*

$$E[Y]=aE[X]+b$$

$$Var[Y]=a^2 Var[X]$$

Distribuição Conjunta

- Até agora, eventos sobre uma única v.a.
  - muitas vezes interesse em eventos que envolvem mais de uma v.a.
- Seja *X* e *Y* duas v.a. definidas sobre um mesmo espaço amostral

$$f_{XY}(i,j) = P[X = i \wedge Y = j]$$

← Distribuição conjunta de *X* e *Y*

- Distribuição de *X* ou *Y* podem ser obtidas da conjunta

$$f_X(i) = \sum_{j \in O_Y} f_{XY}(i,j)$$

$$f_Y(j) = \sum_{i \in O_X} f_{XY}(i,j)$$

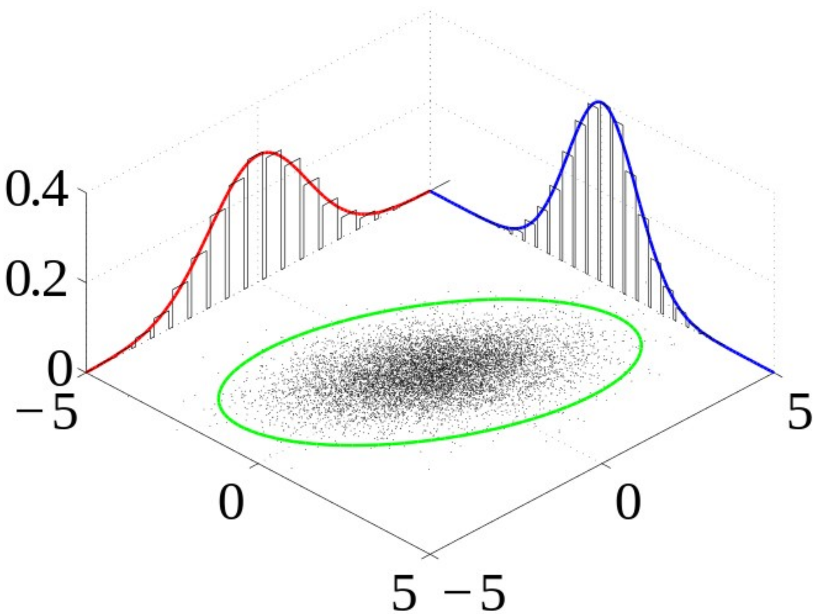
← Também chamada de distribuição marginal

Exemplo

- S = alfabeto, $|S|$ = 26, p_x = 1/26
- X é uma v.a. tal que $X(a)$=1, $X(b)$=2, $X(c)$=3, …, $X(z)$=26
- Y é uma v.a. tal que Y(vogal)=1, Y(consoante)=2

$$f_{XY}(1,1)=? \qquad f_{XY}(1,2)=?$$

$$f_{XY}(2,1)=? \qquad f_{XY}(2,2)=?$$



- Figura com distribuições marginais de X e Y e distribuição conjunta (nuvem de pontos)
- Apenas ilustrativa

Independência entre v.a.

- Seja *X* e *Y* duas v.a. são independentes sse, para todo *i*, *j* ,

$$f_{XY}(i,j)=P[X=i \wedge Y=j]$$
$$=P[X=i]P[Y=j]=f_X(i)f_Y(j)$$

- Exemplo
- Dois dados honestos com *k* faces
- Joga moeda enviesada com prob *p* para escolher o dado
- X = face observada, Y = dado escolhido

$$f_{XY}(i,j)=\frac{p}{k}$$, se *j* = 1

$$f_{XY}(i,j)=\frac{1-p}{k}$$, se *j* = 2

Esperança Condicional

- Seja *X* e *Y* duas v.a. definidas sobre um mesmo espaço amostral

$$f_{X|Y}(i,j) = P[X=i|Y=j]$$

← Distribuição condicional de *X* dado *Y*

- Valor esperado condicional
  - valor esperado restrito a um subconjunto do espaço amostral (definido pelo valor de outra v.a.)

$$E[X|Y=j] = \sum_{i \in O_X} i\, f_{X|Y}(i,j)$$

  - mesma definição de valor esperado (nada de novo)!

Esperança Condicional

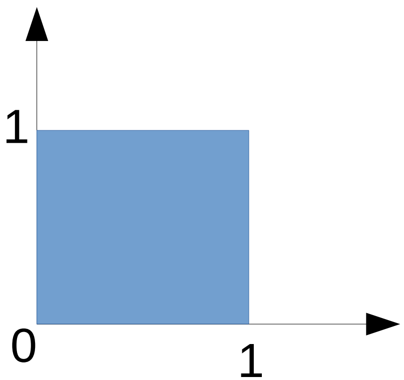
- Muito útil para calcular valores esperados
  - uso similar a prob. condicional para calcular marginal
- Seja E[*X* | *Y* = *j*] uma função da v.a. *Y*
  - repare que E[*X*|*Y*] é função de uma v.a. ao considerar *j* aleatório
- Temos que

$$E[X] = E[E[X|Y]]$$ ← propriedade da torre da esperança

- Exemplo: $S = N_1 + N_2 + \ldots + N_K$
  - parcela N_i~Bin(n,p), iid, e K~Geo(q)
  - número de parcelas é aleatório
- E[S] = ?

Espaço Amostral Contínuo

- Até agora, espaço amostral era discreto (contável)
- Espaço amostral contínuo (não contável)
  - ex. números reais, pontos do quadrado [0,1]x[0,1], etc



Problema: Como associar probabilidade a cada ponto do espaço amostral?

Solução: Dar probabilidade a "subconjuntos" do espaço amostral

- pedaços contíguos do espaço amostral tem uma "densidade" de probabilidade
- eventos representam esses pedaços

Função de Densidade

- Seja *A* um evento qualquer de *S*, subconjunto de *S*
- Dizemos que f(x) é uma função densidade sse

$$P[A]=\int_A f(x)\,dx$$

$\leftarrow$ Área da função densidade dentro do espaço definido por *A*

- Mesma restrição que antes

$$0\le\int_A f(x)\,dx\le 1 \qquad \int_S f(x)\,dx=1$$

- Exemplo: *S* = [*a*, *b*] intervalo, para *a*, *b* constantes

$$f(x)=\frac{1}{b-a},\ x\in[a,b] \qquad P[A]=\int_{a'}^{b'} f(x)\,dx=\frac{b'-a'}{b-a}$$

- *A* = [*a'*, *b'*] com *a'*>= *a*, *b'*<=*b*

Segue Tudo

- Todos os conceitos são equivalentes
  - independência, exclusão mútua, prob. total, Bayes, etc
  - trocar somatório por integral
- Definir v.a. para *S* contínuo

$X : S \rightarrow \mathbb{R}$ ← v.a. contínua, pois domínio não é contável

- Todos os conceitos sobre v.a. são equivalentes
  - função de distribuição (chamada de densidade)
  - valor esperado, variância, propriedades
  - distribuição conjunta, etc
  - trocar somatório por integral nas definições, usando CDF quando necessário