# Redes Complexas
# Aula 9

**Aula passada**

- Modelos de redes
- Grafos aleatórios
- Modelo G(n,p)
- Propriedades

**Aula de hoje**

- Modelo G(n, p)
- Threshold functions
- Propriedades estruturais

# Modelo G(n,p)

- Modelo aleatório para grafos
  - Modelo clássico, Erdos-Reyni
- Dois parâmetros (determinísticos)
  - n: número de vértices
  - p: prob. de existência de cada aresta
- Cada possível aresta do grafo existe com probabilidade *p* independentemente
  - grafo não-direcionado, sem loops

**Estudo das propriedades topológicas deste modelo**

# G(n,p) com p(n)

- p(n) é uma função de n
  - caso anterior p(n) = cte

**Qual p(n)?**

- p(n) deve **decrescer** com n
  - Figura!
- Exemplos (c é constante)

$$p(n) = \frac{c}{n} \qquad p(n) = c\,n^{-2.5} \qquad p(n) = \frac{c \log n}{n}$$

# Propriedade de *Quase Todos os Grafos*

- Seja G um modelo aleatório para grafos e X uma propriedade topológica
- Se

$$P[G\ possuir\ X] \to 1 \quad \text{quando} \quad n \to \infty$$

- Então dizemos que quase todos os grafos de G possuem X
  - X ocorre em G a.a.s. (*asymptotically almost surely*)

# Threshold Functions

- Seja X uma propriedade do grafo e p(n) uma função que define a prob. da aresta
- Dizemos que t(n) é uma *threshold function* para propriedade X quando
  - Se $\frac{p(n)}{t(n)} \rightarrow 0$ Então G(n,p) **não possui** a propriedade X, a.a.s.
  - Se $\frac{p(n)}{t(n)} \rightarrow \infty$ Então G(n,p) **possui** a propriedade X, a.a.s.

**t(n) é divisor de águas!**

# Exemplo

- X = “ser conexo”

$$t(n) = \frac{\log n}{n}$$ é threshold function para X

- Se p(n) decresce mais rápido, então grafo G(n,p) é desconexo, a.a.s.
- Se p(n) decresce mais devagar, então grafo G(n,p) é conexo, a.a.s.

**log n / n é divisor de águas para propriedade ser conexo!**

# Subgrafo H

- Dado um grafo H (não rotulado)
- Prob. de H ser subgrafo de G(n,p)?
  - para n grande o suficiente

**Resultado surpreendente**

- Probabilidade tende a zero ou tende a um
- Depende apenas do número de vértices e arestas de H (assumindo que H é balanceado)
  - e de p(n)

# Grafo Balanceado

- **Intuitivamente**: Grafo que não possui partes muito diferentes
- Grau médio de um subgrafo H
  - $2m(H)/n(H)$
- Considere subgrafo induzido H
  - subgrafo que contém todas arestas de G entre vértices de H
- Grafo G é balanceado se grau médio de todo subgrafo induzido H é menor ou igual ao grau médio de G
- Ex. de grafos balanceados
  - árvores, ciclos, grafos completos

# Subgrafo H

- Dado um grafo H (não rotulado) balanceado
  - k vértices e l arestas (l > 0)
- Prob. de H ser subgrafo de G(n,p)?
  - H “aparece” em G(n,p) se existe ao menos um subgrafo de G que seja isomorfo a H
- Propriedade X = “H é subgrafo de G(n,p)”

$t(n) = n^{-k/l}$ é *threshold function* para X

# Exemplo de Árvores

- H = árvore com k > 1 vértices (ordem k)
  - necessariamente, k-1 arestas
- Quando que tais árvores aparecem no G(n,p)?

$$t(n) = n^{-k/(k-1)}$$ é threshold function para árvores de ordem k

- Se p(n) decresce mais rápido, então grafo G(n,p) não possui árvore de ordem k, a.a.s.
- Se p(n) decresce mais devagar, então grafo G(n,p) possui árvore de ordem k, a.a.s.
- Se p(n) = log n / n terei subgrafos que são árvores de que tamanho (fixo)?

# Exemplo de Ciclos

- H = ciclo com k > 2 vértices (tamanho k)
  - necessariamente, k arestas
- Quando que tais árvores aparecem no G(n,p)?

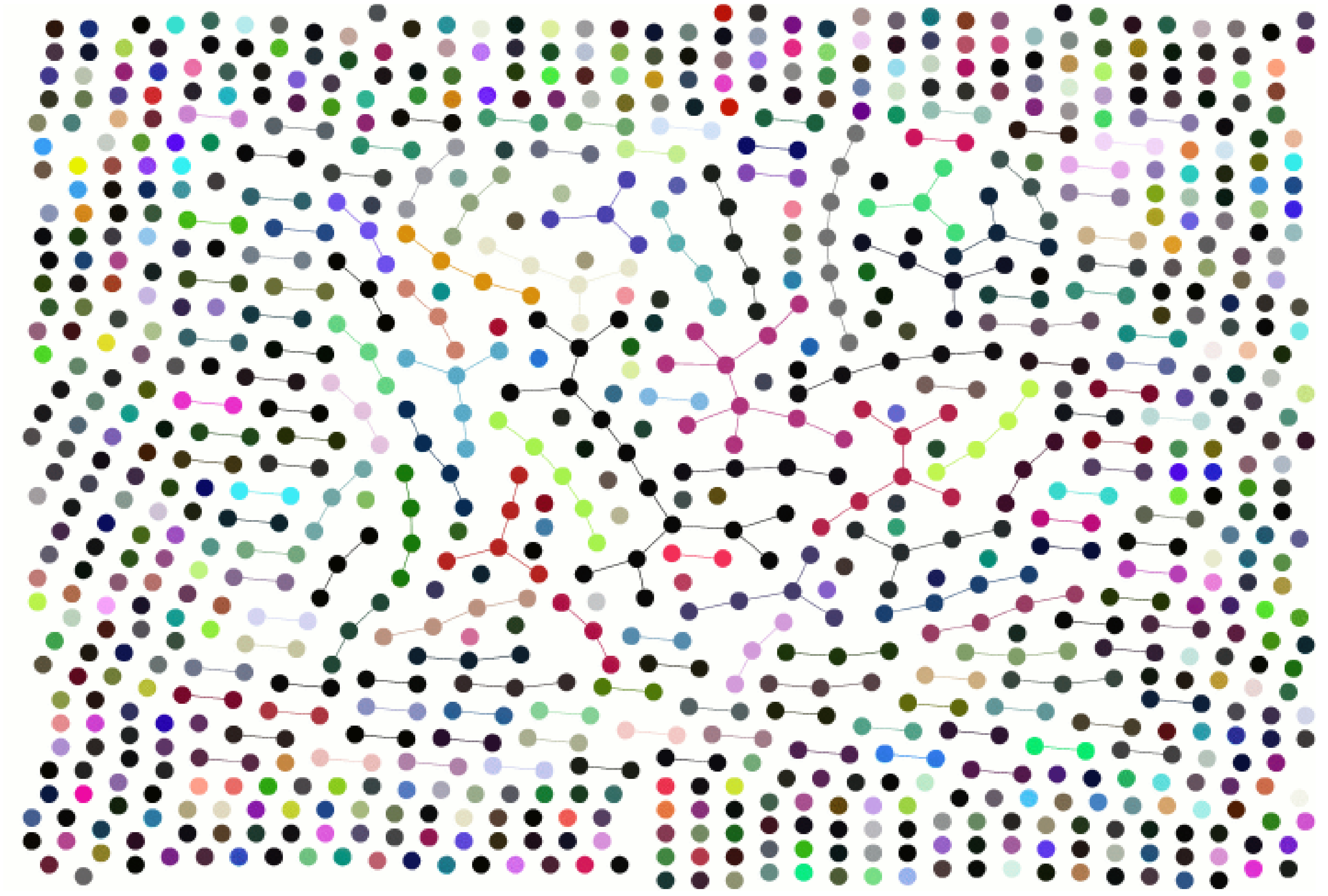
$t(n) = n^{-1}$ é threshold function para qualquer ciclo de tamanho fixo

- Se p(n) decresce mais rápido, então grafo G(n,p) não possui ciclo de tamanho k, a.a.s.
- Se p(n) decresce mais devagar, então grafo G(n,p) possui ciclo de tamanho k, a.a.s.

# G(1000,0.2/1000)

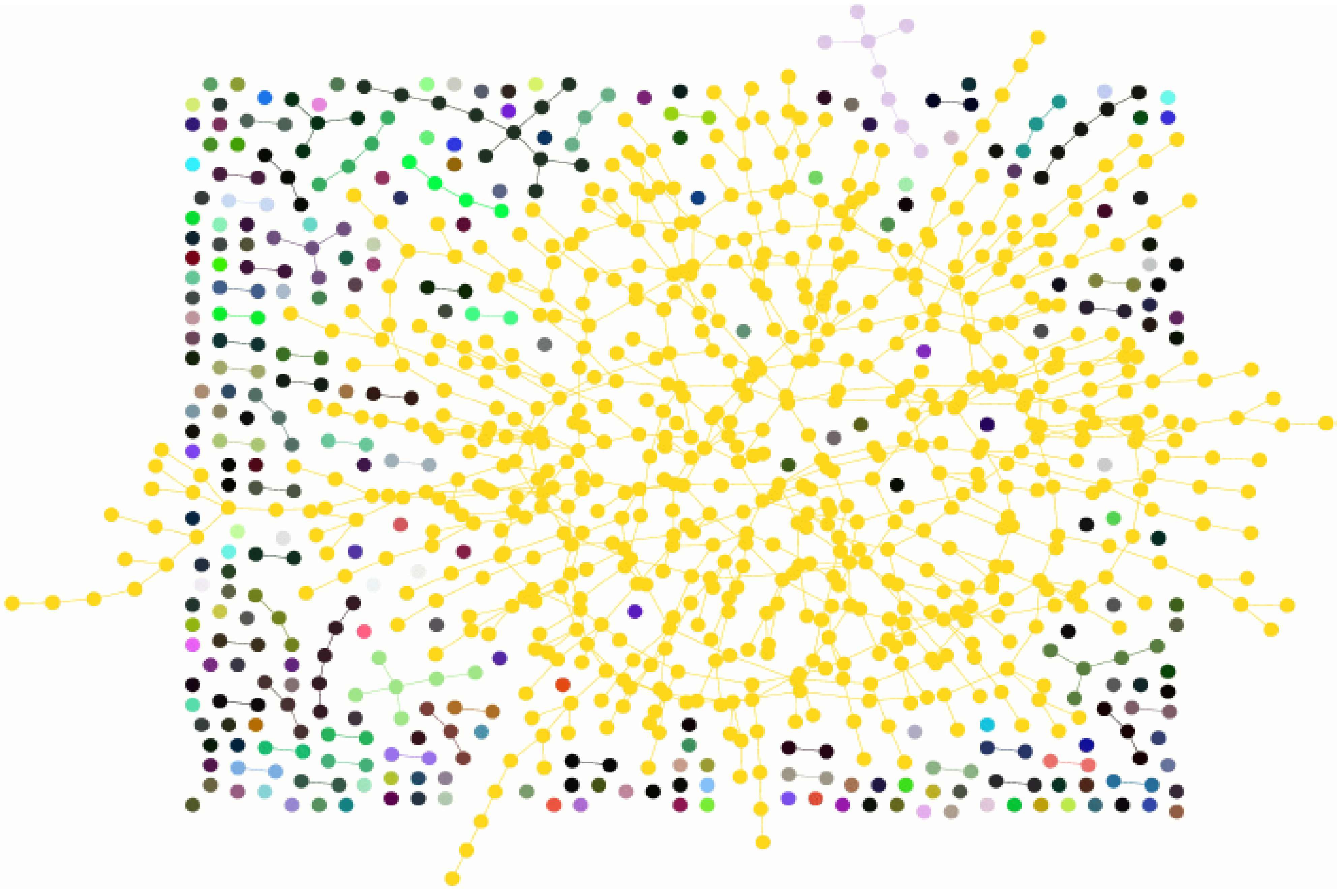
Figueiredo – 2014

# G(1000,0.5/1000)



Figueiredo – 2014

# G(1000,1.5/1000)



Figueiredo – 2014

# G(n,p) com grau médio fixo

- Grau médio fixo, igual a z

$$p(n) = z/(n-1)$$

- Propriedades estruturais dependem de z
  - estudo em função de z
- Tamanho das componentes conexas

**Intuição?**

- Divisor de águas: $z < 1$, $z > 1$ ?

# Componentes Conexas

- z : grau médio de um vértice
- z < 1 (subcrítico)
  - componentes conexas tem tamanho O(log n) (a.a.s.)
  - Muitas componentes conexas
- z > 1 (supercrítico)
  - maior componente conexa tem tamanho $\Omega$(n)
  - todas outras de tamanho O(log n)

**Transição de fase na estrutura do grafo!**

# G(n,p), distância média

- Distância média entre os vértices
  - vértices da componente gigante
- Assumir $p(n) = z / (n - 1)$, $z > 1$
- Distância média no G(n,p) é O(log n/log z) a.a.s.
- Como provar este resultado?
- Idéia: escolher dois vértices aleatórios, mostrar que um está na vizinhança do outro depois de log n / log z passos
- Processo de ramificação

# Grau Crescente

- Outra função interessante

$$p(n) = \frac{c \log n}{n-1}$$

Com c constante > 0

- Grau médio cresce devagar com n
- Possuiu outras propriedades estruturais
- Conectividade: grafo gerado é conexo
- Ponto crítico em log n / n

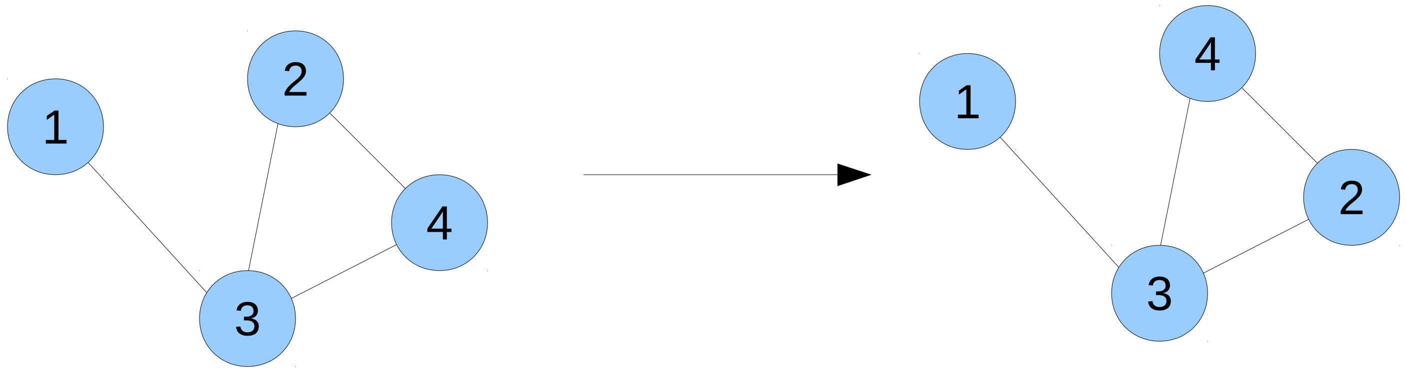
# G(n,p), grau médio $\Omega(\log n)$

- Para $p(n) = c \log n / n$, G(n,p) é conexo a.a.s.

- Como provar este resultado?
- Idéia: mostrar que o número de vértices isolados vai a zero
- Mostrar que o número de componentes pequenos vai a zero

# Automorfismos

- Permutação dos rótulos dos vértices que não modifica o conjunto de arestas




- Alguns grafos possuem automorfismos, outros não
  - grafos assimétricos ou simétricos
- Se p(n) = c log n / n, G(n,p) não possui automorfismos a.a.s.