Redes Complexas
Aula 13

Aula passada

- Experimento de Milgram
- Modelo “Small World”
- Propriedades estruturais

Aula de hoje

- Configuration Model
- Propriedades
- Stochastic Block Model
- Propriedades

Configuration Model

- Como construir modelo com determinada distribuição de grau?

Graus como parâmetro do modelo!

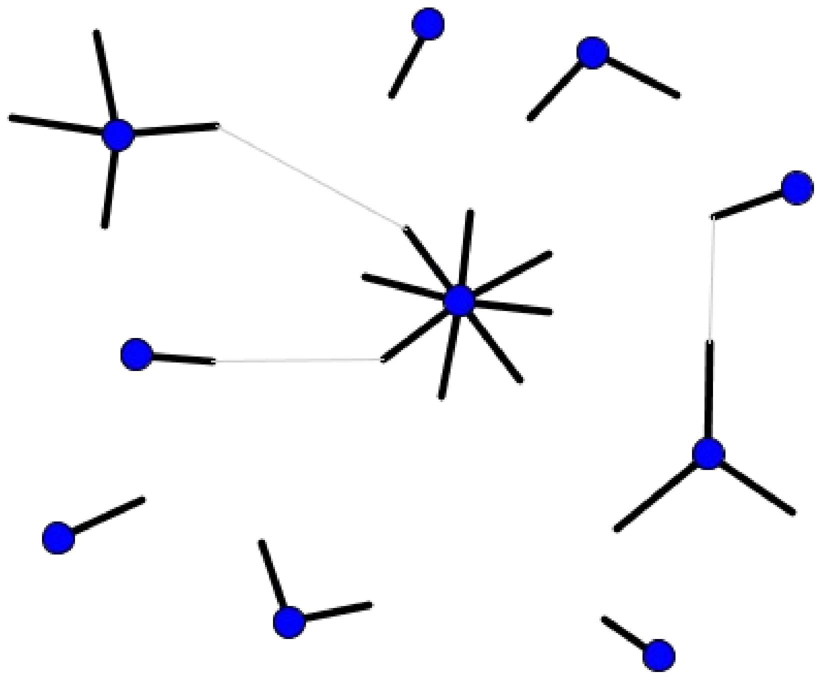
- Dado n vértices e uma sequência de graus: $d_1, d_2, ..., d_n$
  - soma de d_i deve ser par
- Criar cada nó com d_i pontas de arestas (stubs)

1) Escolher duas pontas livres uniformemente

2) Conectar as pontas. Voltar para (1)

Configuration Model

- Exemplo com n=10



- Escolher duas pontas e conectar!

- Múltiplas arestas e loops (auto-aresta) podem acontecer
  - valor esperado é constante, fração vai a zero com *n* crescente

Probabilidade de Aresta

- Qual probabilidade da aresta (i, j)?
- Grau de i, j é dado por d_i, d_j

$$2m=\sum_{i=1}^{n} d_i$$ Soma dos graus

- Cada stub de i tem chance d_j / (2m – 1) de ser incidente a j
- Como temos d_i stubs em i

$$p_{ij}=\frac{d_i d_j}{2m-1}\approx\frac{d_i d_j}{2m}$$

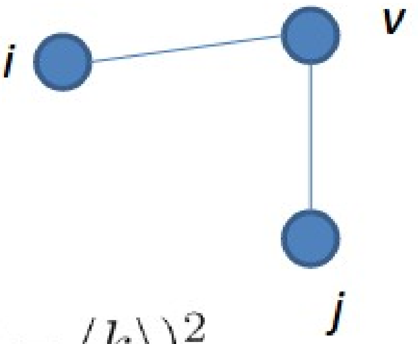
Clusterização

- Probabilidade de restante de grau
  - seguir uma aresta ao acaso

$$q_k = \frac{(k+1)\,p_{k+1}}{\bar{d}}$$

q_k = prob. de restante de grau ser k

- Dado v conectado a dois vértices, i e j
- Chance de fechar o triângulo?
- Condicionar no restante de grau!



$$C = \sum_{k_i,k_j=0}^{\infty} q_{k_i} q_{k_j} \frac{k_i k_j}{2m} = \frac{1}{2m}\Big(\sum_{k=0}^{\infty} k q_k\Big)^2 = \cdots = \frac{1}{n}\frac{(\langle k\rangle^2 - \langle k\rangle)^2}{\langle k\rangle^3}$$

Obs: k_i é o restante de grau do vértice i na equação acima

Componente Gigante

- GCC : componente conexa gigante
  - maior componente conexa tem εn vértices, para algum $\varepsilon > 0$, a.a.s.
- Condição para termos uma GCC em um grafo aleatório qualquer em grafo aleatório

$$E[d_i | i - j] > 2$$, para todos vértices i, j dentro da GCC

- Condição pode ser reescrita em função do primeiro e segundo momento da distribuição de grau

$$E[d_i | i - j] > 2 \quad \longleftrightarrow \quad \kappa = \frac{E[d^2]}{E[d]} > 2$$

Chung-Lu Model

- Variação do Configuration Model
  - preferida pelos matemáticos
- Vetor de pesos w_1, w_2, ... w_n associado aos vértices (possivelmente reais)
- Conectar cada par de vértices com probabilidade (permitindo loops)

$$p_{ij} = \frac{w_i w_j}{\sum_k w_k}$$

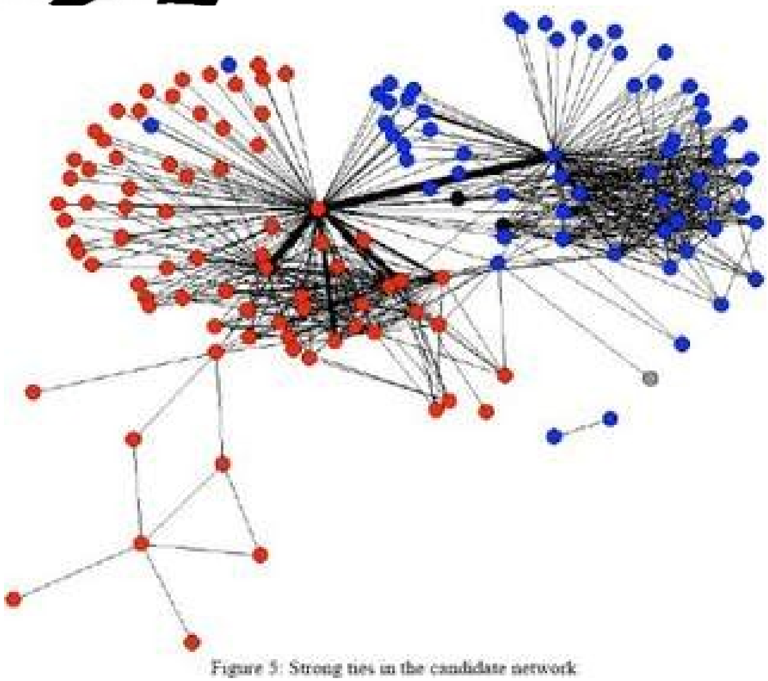
- valor esperado de grau do vértice i :

$$\overline{d}_i = \sum_j p_{ij} = \sum_j \frac{w_i w_j}{\sum_k w_k} = w_i$$

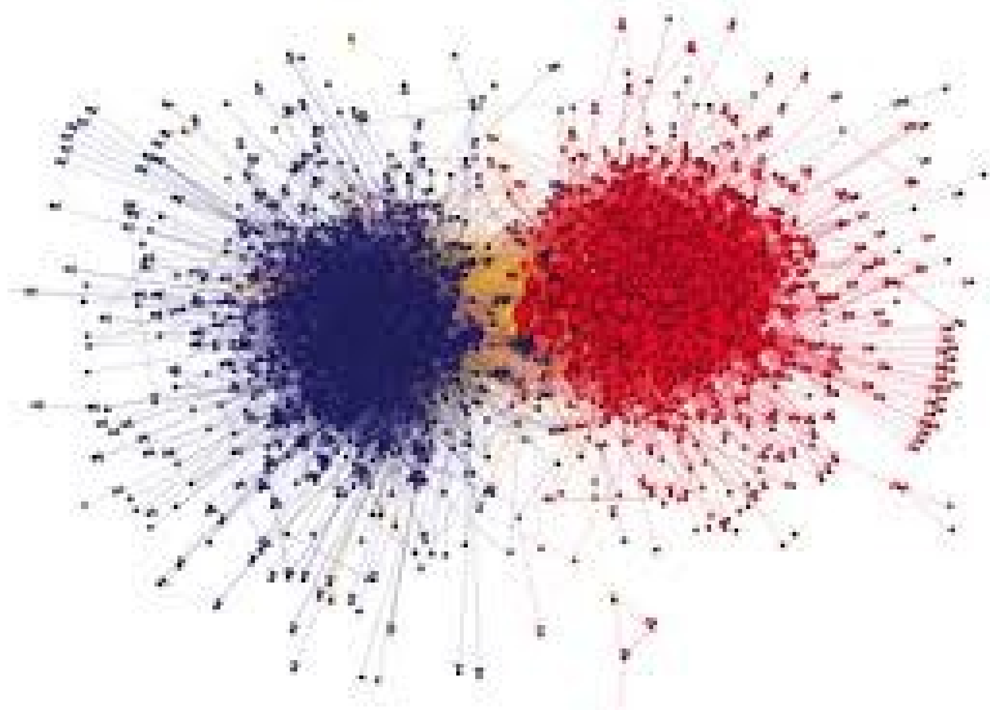
- w_i é o grau esperado do vértice i, diferente do Configuration Model

Modelos com Homofilia

- Como criar modelos com padrões de conexão distintos (ex. homofilia)?



Políticos nos EUA (DEM x REP)



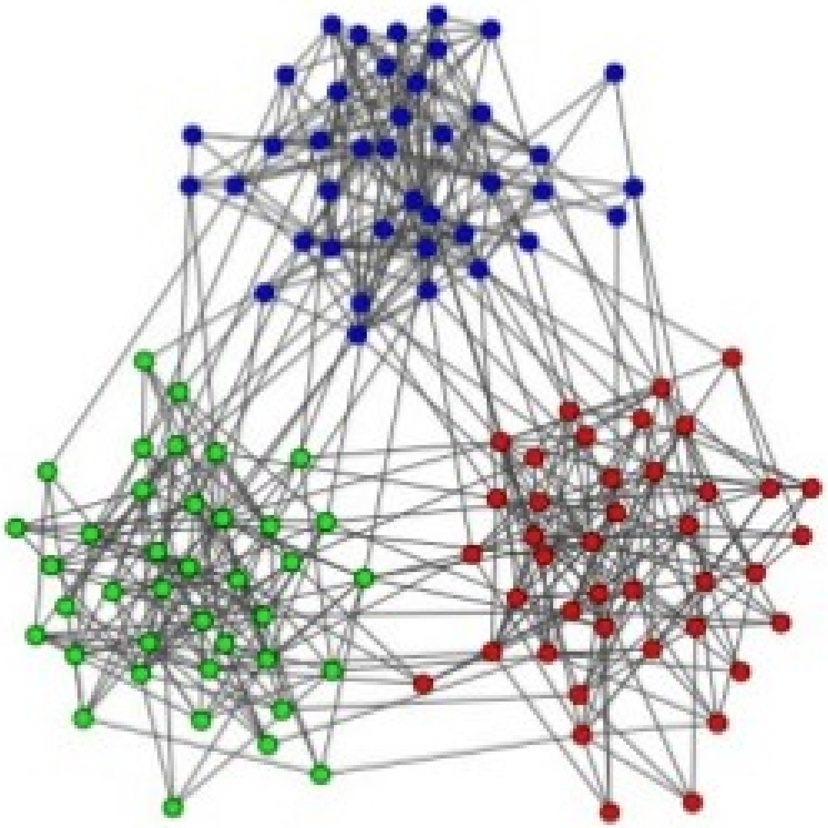
Blogs nos EUA (DEM x REP)

Embutir padrões no modelo!

Stochastic Block Model (SBM)

- Generalização do G(n,p) para grupos
- Modela homofilia entre grupos (blocos)
  - proposto em 1983, em *Social Networks*
- k blocos, V_i conjunto de vértices no bloco i, $n_i = |V_i|$, tamanho do bloco i
- B = matriz (simétrica) de probabilidade de aresta entre vértices dos blocos
  - b_{ij} = prob. de aresta (u,v), u em V_i , v em V_j
- Em geral, b_{ii} maior que b_{ij} , j != i
  - captura homofilia

SBM Exemplo



- 3 blocos (k=3)
- n_k = 40 para todo k

$$B = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.01 & 0.01 \\ 0.01 & 0.2 & 0.01 \\ 0.01 & 0.01 & 0.2 \end{pmatrix}$$

- Valor esperado do grau do vértice v?
- Condicionar no bloco (v no bloco i)!

$$E[d_v | v \in V_i] = \sum_{j=1}^{k} n_j b_{ij}$$

SBM

- Modelo canônico para redes com comunidades (grupos)
  - em geral, k=2, $n_k = n$
- Importante no estudo de algoritmos de detecção de comunidades
  - como saber que algoritmo detectou corretamente? Usar SBM para avaliar!