

# Redes Complexas

## Aula 14

### **Aula passada**

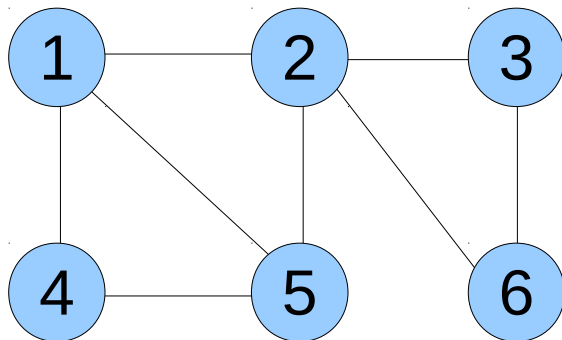
- Configuration Model
- Propriedades
- Stochastic Block Model (SBM)
- Propriedades

### **Aula de hoje**

- Resilience (“robustez”)
- Tipo de falhas
- Influência da estrutura
- Análise do ponto crítico

# Redes e Falhas

- Rede: abstração de um sistema real
  - ex. Internet, rede social, web
- “Componentes” da rede podem falhar
  - vértices ou arestas



**Mudanças  
estruturais!**

**O que acontece quando  
falhas ocorrem?**

# Resilience (“robustez”)

- Capacidade da rede de *operar* na presença de falhas
  - vértices ou/e arestas
- Medida da redundância existente na rede
  - muitas métricas
- Robustez em função da topologia
  - impacto da topologia na robustez
- Aplicação depende do contexto
  - ex. robustez da Internet a falhas nos AS

# Métricas de Robustez

- Métricas locais

- impacto em um ou poucos vértices
- ex. número de arestas para desconectar um vértice qualquer

- Métricas globais

- impacto na rede como um todo
- ex. tamanho da componente gigante

**Interesse em métricas globais**

# Métricas Globais

- Tamanho da componente gigante
  - absoluto ou relativo
- Tamanho médio das componentes
  - excetuando a componente gigante
- Distância média entre todos os pares
- Diâmetro da rede
  - maior distância entre qualquer par

**Outras?**

# Tipo de Falhas

- Como vértices ou arestas falham?
- Aleatoriamente
  - uniforme: todos tem mesma prob de falhar
  - não-uniforme: algum fenômeno
- Deterministicamente
  - Definir ordenação: quem falha primeiro, segundo, etc.
  - ex. ordenação decrescente por grau
- Falhas por defeito: aleatório
  - ex. roteador queimou
- Falhas propositas: determinístico
  - ex. roteador foi atacado

# Resilience e Falhas

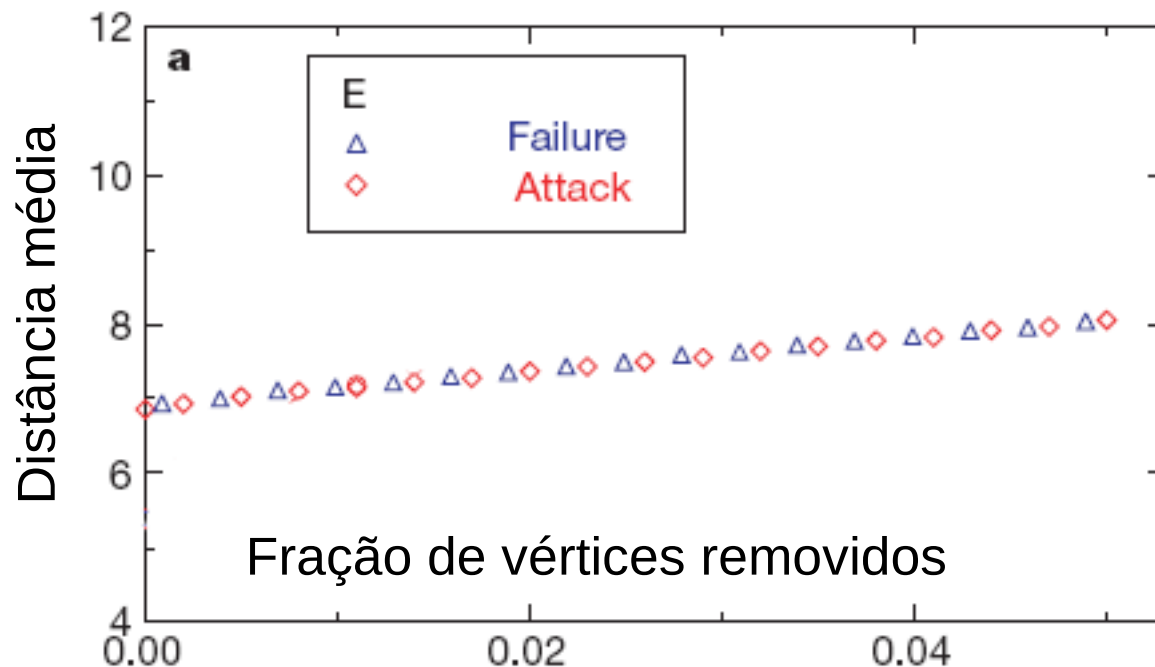
- Robustez da rede na presença de falhas
  - Aleatórias (uniforme), determinística (grau)
  - Ex. distância média entre pares
- Diferença com relação ao tipo de falha?
  - para uma mesma fração que falha
- Influência da topologia da rede?
  - para mesmo  $n$  e grau médio

**Modelo  $G(n,p)$ ? Modelo BA?**

# Falhas no $G(n,p)$

## ■ Intuição?

- Falhas aumentam (mas não muito) a distância média entre vértices
- Falhas aleatórias se parecem com falhas determinísticas
  - grau máximo é próximo ao grau médio



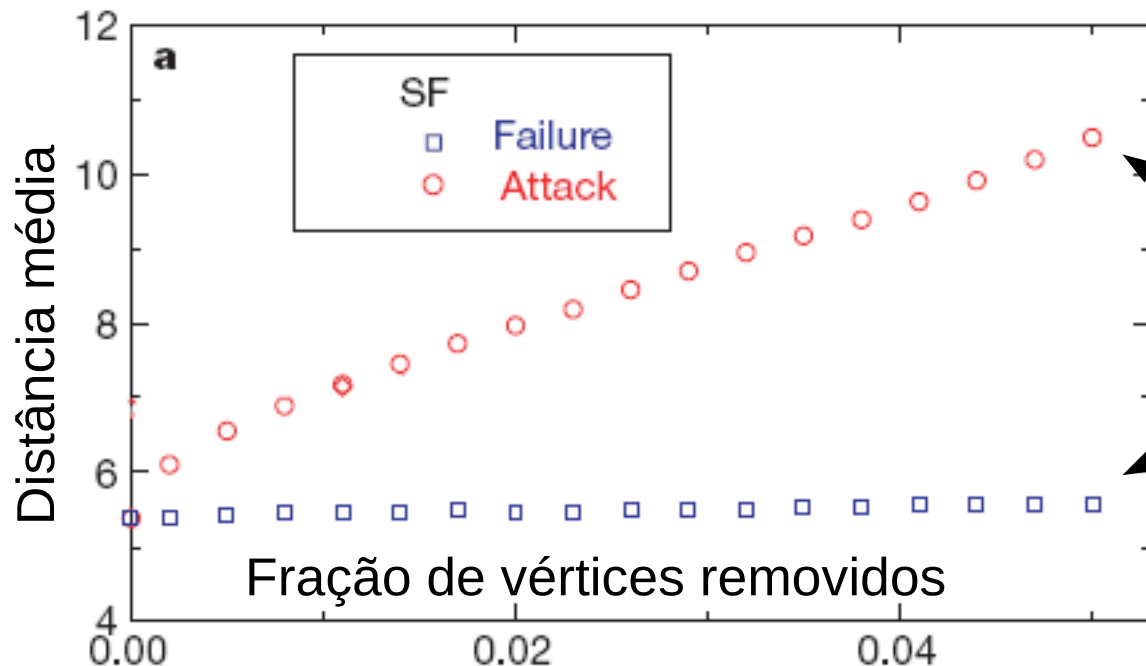
■  $N = 10000$ ,  $\langle D \rangle = 4$



# Falhas no BA

## ■ Intuição?

- Falhas aleatórias **não** se parecem com falhas determinísticas
- Falhas aleatórias: pouco impacto  
falhas determinísticas: muito impacto



■  $N = 10000$ ,  $\langle D \rangle = 4$

5% dos vértices removidos;  
distância média dobrou!

5% dos vértices removidos;  
distância média não variou

# Falhas Aleatórias

❑ Modelo BA, lei de potência



❑ Remoção aleatória (uniforme)

❑ Pouco impacto, rede robusta

# Falhas Determinísticas

- ❑ Modelo BA, lei de potência
- ❑ Remoção por ordem decrescente do grau



- ❑ Impacto devastador
- ❑ Estrutura tem papel fundamental

# Modelo BA

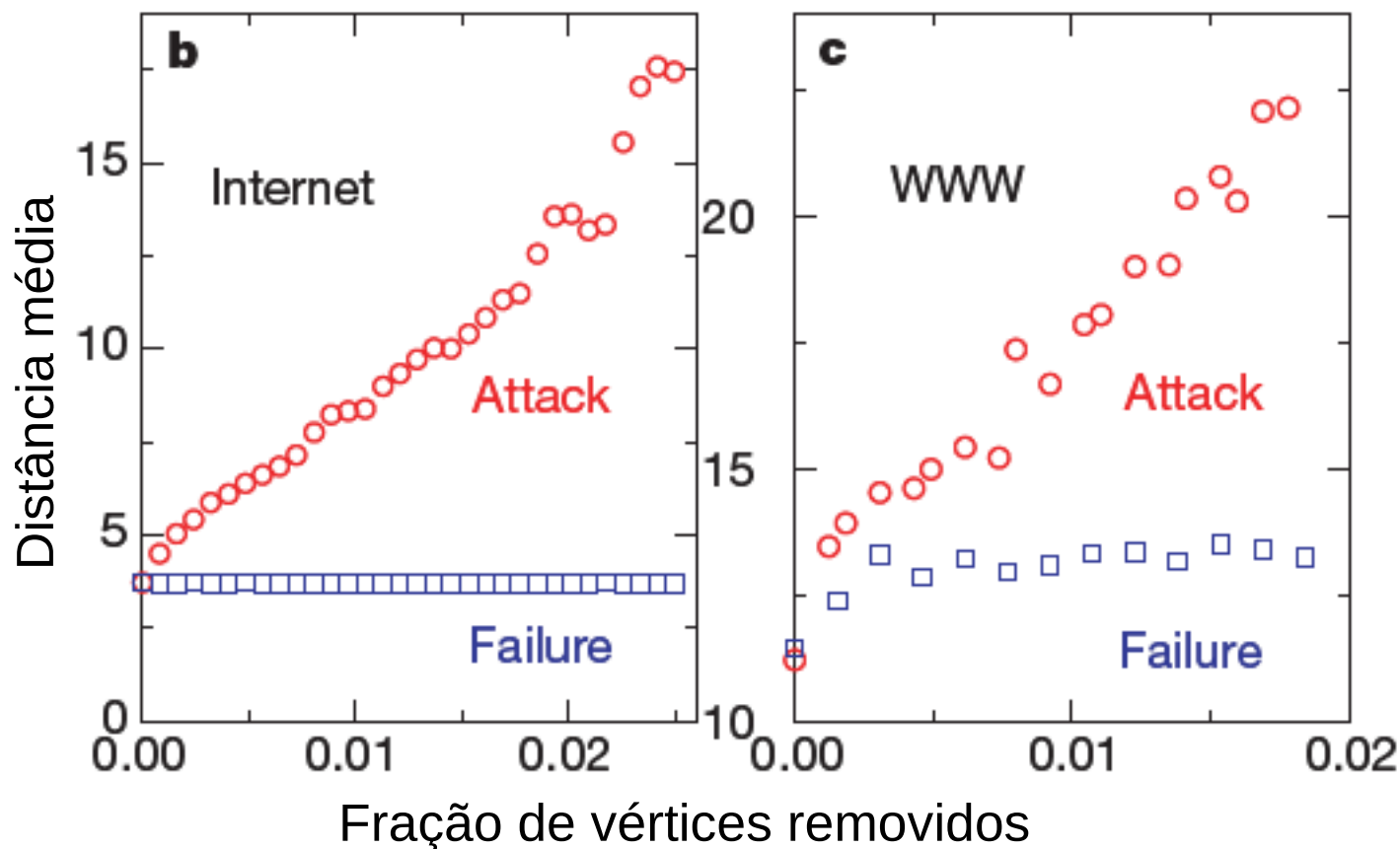
- Distribuição do grau segue lei de potência
  - Maioria dos vértices tem grau pequeno
  - Pouca importância na rede
  - ↓
  - Tolerante a falhas aleatórias
- Poucos vértices com grau grande
  - Interconectam a rede
  - ↓
  - Vulnerável a ataques direcionados

**Propriedade de redes livre de escala!**

# Robustez em Redes Reais

- WebGraph, AS Graph

- Redes seguem lei de potência no graus



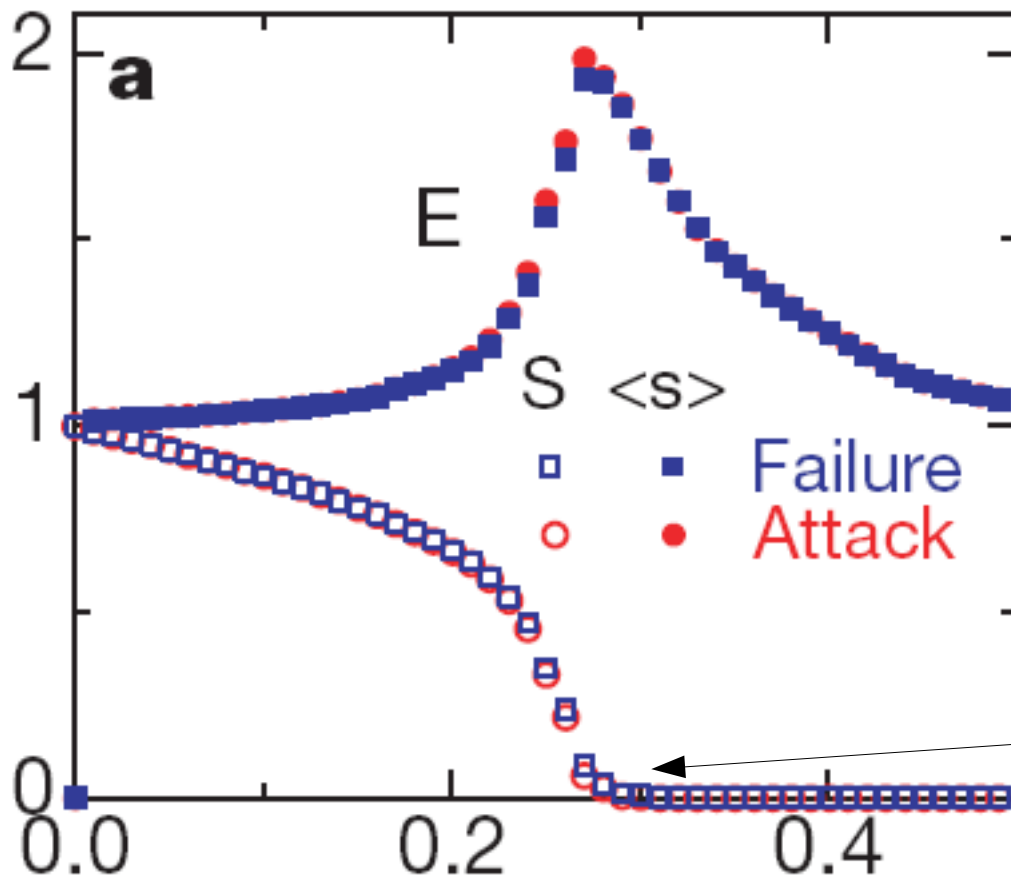
- Comportamento parecido com modelo BA

- Tolerante a falhas, vulnerável a ataques

- AS não é roteador!

# Outras Métricas

- Tamanho relativo da componente gigante (GCC)
- Tamanho médio das outras componentes
- **Intuição  $G(n,p)$ ?**

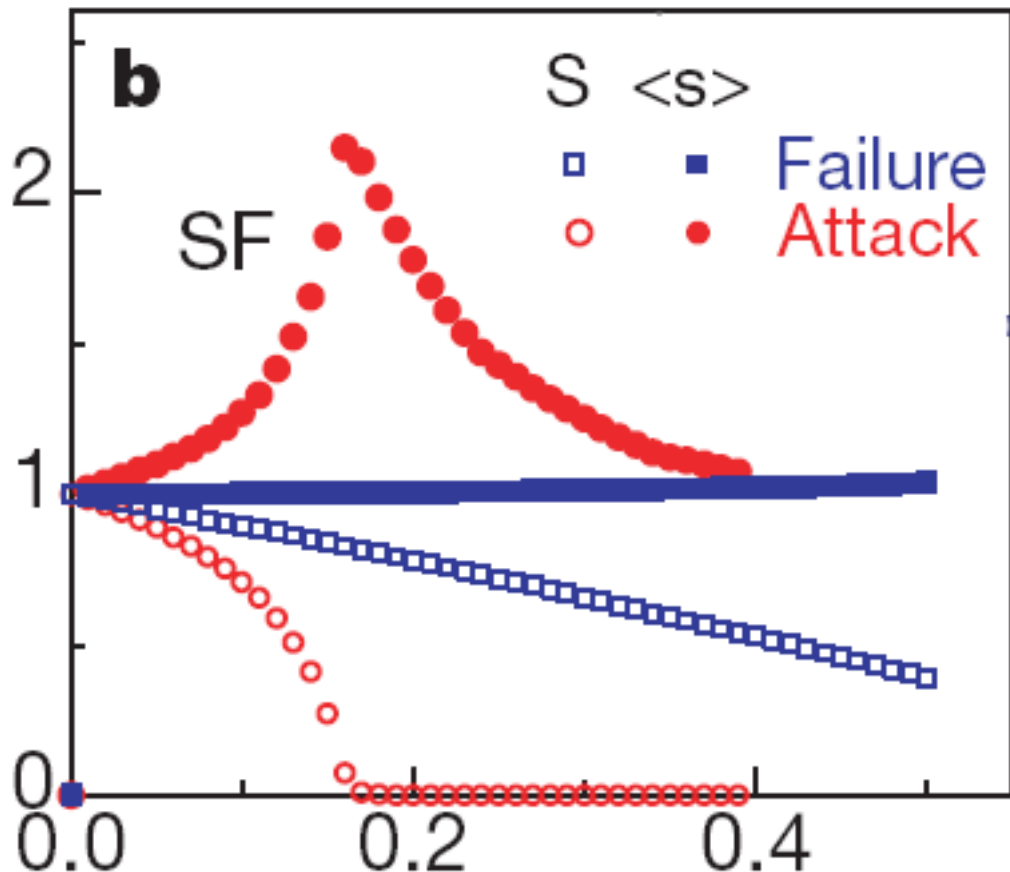


- Falhas eventualmente destroem componente gigante
- Tamanho médio das outras componentes vai a um
- Rede despedaçada!

Transição de fase?

# Outras Métricas

- Intuição para modelo BA?
- Falha aleatória diferente de falha determinística



- Decrescimento linear tamanho relativo da GCC
- Tamanho médio das outras CC é 1
- Rede despedaçada para falhas direcionadas
- Despedaça antes da  $G(n,p)$

# Transição de Fase

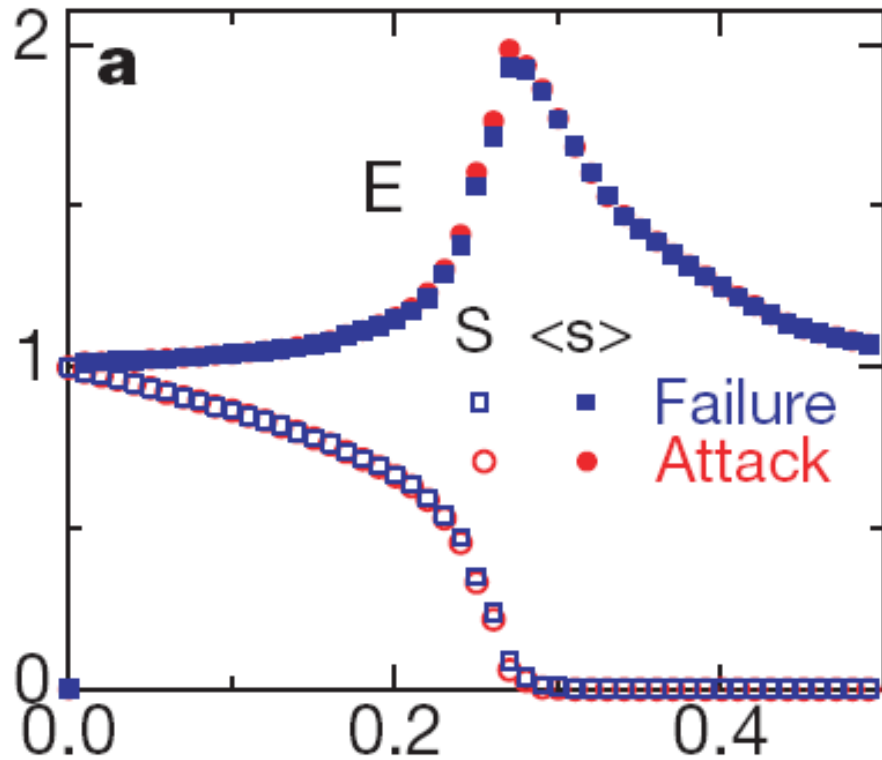
- Tamanho relativo da componente gigante
  - vai a zero rapidamente, para  $p$  grande suficiente

## Valor de $p$ que desintegra GCC?

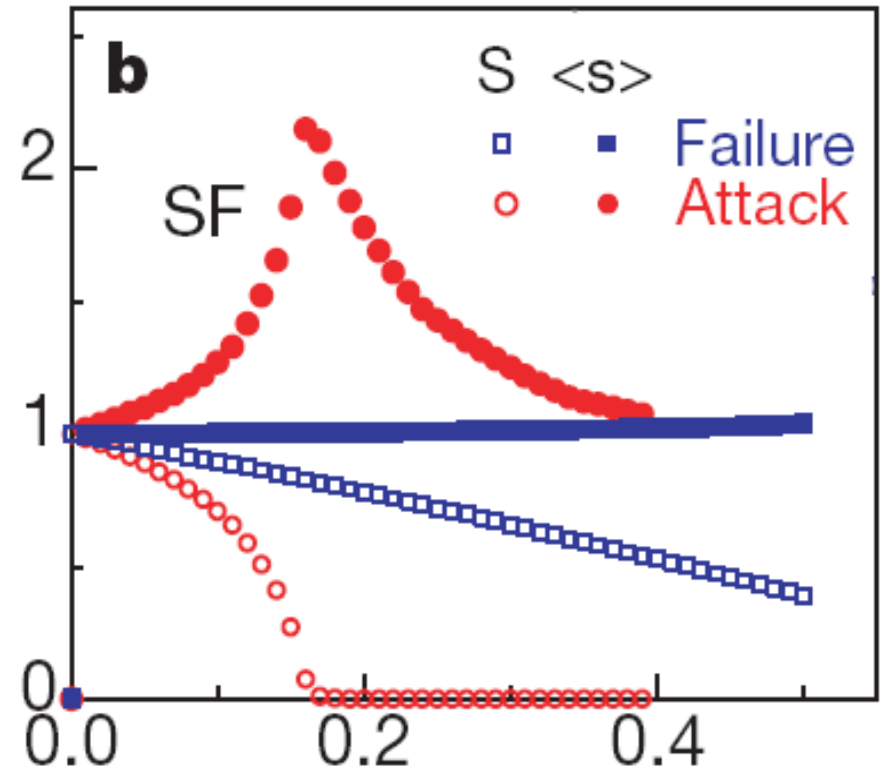
- Depende do modelo de falhas
  - Aleatório ou determinístico
- Depende da estrutura
  - $G(n,p)$ , BA, etc



# Tamanho da Maior CC



■  $G(n,p)$ , indiferente quanto ao tipo de falha



■ BA, “robusta enquanto frágil”

# Estudo Analítico

- GCC : componente conexa gigante
  - maior componente conexa tem  $\varepsilon n$  vértices, para algum  $\varepsilon > 0$ , a.a.s.
- Condição (aprox) para termos uma GCC em um grafo aleatório qualquer

$E[d_i | i-j] > 2$  , para todos vértices  $i, j$  dentro da GCC

- Valor esperado do grau de  $i$ , dado que  $i$  e  $j$  são vizinhos
- Intuição?
- Condição no  $G(n,p)$  ?
- $E[d] > 1$

# Condição Equivalente

- Condição (aprox) para termos uma GCC em um grafo aleatório qualquer

$$E[d_i | i-j] > 2 \quad \longleftrightarrow \quad \kappa = \frac{E[d^2]}{E[d]} > 2$$

- Depende apenas do primeiro momento  $E[d]$  e do segundo momento  $E[d^2]$  da distribuição do grau dos vértices!
- Distribuição do grau dos vértices depois da falha determina existência do GCC
- Problema: calcular dois momentos da distribuição (depos da remoção)!

# Distribuição do Grau

- Considere distribuição de grau original
  - $P[D = k]$ , é dada
- Após falha dos vértices, qual nova distribuição do grau?
  - $P[D' = k]$
- Depende do modelo de falhas!
- Assumir modelo aleatório (uniforme)
- Obs: remover uma fração  $p$  dos vértices equivale a cada vértice deixar de existir com probabilidade  $p$

# Distribuição do Grau

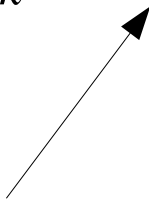
- Dado grau original  $k$ , probabilidade do grau ser  $k'$  após falha?

$$P[D' = k' | D = k] = \binom{k}{k'} (1-p)^{k'} p^{k-k'}$$

- Descondicionando

$$P[D' = k'] = \sum_{k=k'} P[D = k] \binom{k}{k'} (1-p)^{k'} p^{k-k'}$$

Distribuição original  
(antes das falhas)



# Momentos e Ponto Crítico

- Podemos então calcular os momentos de  $D'$  (distribuição do grau após falhas)

$$E[D'] = E[D](1 - p)$$

$$E[D'^2] = E[D^2](1 - p)^2 + E[D]p(1 - p)$$

- Usando a condição, podemos determinar o ponto crítico,  $p_c$

$$p_c = 1 - \frac{E[D]}{E[D^2] - E[D]}$$

← Momentos da distribuição de grau original (pré-falhas)

- Valores menores mantêm uma GCC

# Grau Segundo Lei Potência

- Ponto crítico em redes cujo grau segue lei de potência

$$p_c = 1 - \frac{E[D]}{E[D^2] - E[D]}$$

- Lei de potência:  $P[D=k] = C k^{-\alpha}$
- Para  $\alpha < 3$ , o que acontece?
- Momentos divergem! Logo,  $p_c = 1$
- Não existe transição de fase!
- GCC nunca se desintegra (quando  $n$  tende infinito)
- Rede é altamente tolerante a falhas!

# Grau Segundo Lei Potência

- Para  $\alpha > 3$ , o que acontece?
- Temos os dois momentos definidos
  - Dependem de  $\alpha$  (exponente)
- Relação aproximada entre  $p_c$  e  $\alpha$ 
  - detalhes no artigo
- Intuição?
  - Maior  $\alpha$  menor é o valor de  $p_c$



# Generalizando Análise

- Análise anterior para falhas aleatórias (uniforme)
- Generalização para falhas aleatórias em função do grau
- Generalização para falhas determinísticas
  - função do grau
- Análise do ponto crítico, do tamanho das componentes gigante, tamanho médio das outras componentes
- Análise via percolação e função geradora

**Mais detalhes no artigo!**