

Redes Complexas

Aula 14

Aula passada

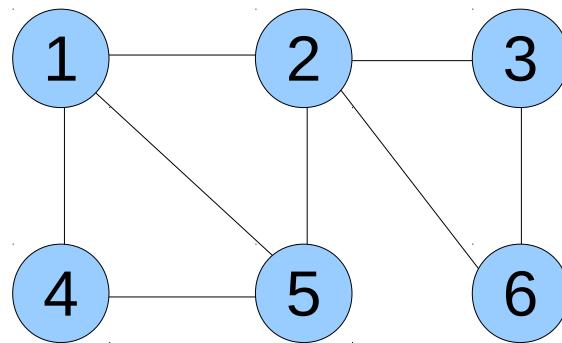
- Configuration Model
- Propriedades
- Stochastic Block Model (SBM)
- Propriedades

Aula de hoje

- Resilience (“robustez”)
- Tipo de falhas
- Influência da estrutura
- Análise do ponto crítico

Redes e Falhas

- Rede: abstração de um sistema real
 - ex. Internet, rede social, web
- “Componentes” da rede podem falhar
 - vértices ou arestas



Mudanças
estruturais!

O que acontece quando
falhas ocorrem?

Resilience (“robustez”)

- Capacidade da rede de *operar* na presença de falhas
 - vértices ou/e arestas
- Medida da redundância existente na rede
 - muitas métricas
- Robustez em função da topologia
 - impacto da topologia na robustez
- Aplicação depende do contexto
 - ex. robustez da Internet a falhas nos AS

Métricas de Robustez

■ Métricas locais

- impacto em um ou poucos vértices
- ex. número de arestas para desconectar um vértice qualquer

■ Métricas globais

- impacto na rede como um todo
- ex. tamanho da componente gigante

Interesse em métricas globais

Métricas Globais

- Tamanho da componente gigante
 - absoluto ou relativo
- Tamanho médio das componentes
 - excetuando a componente gigante
- Distância média entre todos os pares
- Diâmetro da rede
 - maior distância entre qualquer par

Outras?

Tipo de Falhas

- Como vértices ou arestas falham?
- Aleatoriamente
 - uniforme: todos tem mesma prob de falhar
 - não-uniforme: algum fenômeno
- Deterministicamente
 - Definir ordenação: quem falha primeiro, segundo, etc.
 - ex. ordenação decrescente por grau
- Falhas por defeito: aleatório
 - ex. roteador queimou
- Falhas propositais: determinístico
 - ex. roteador foi atacado

Resilience e Falhas

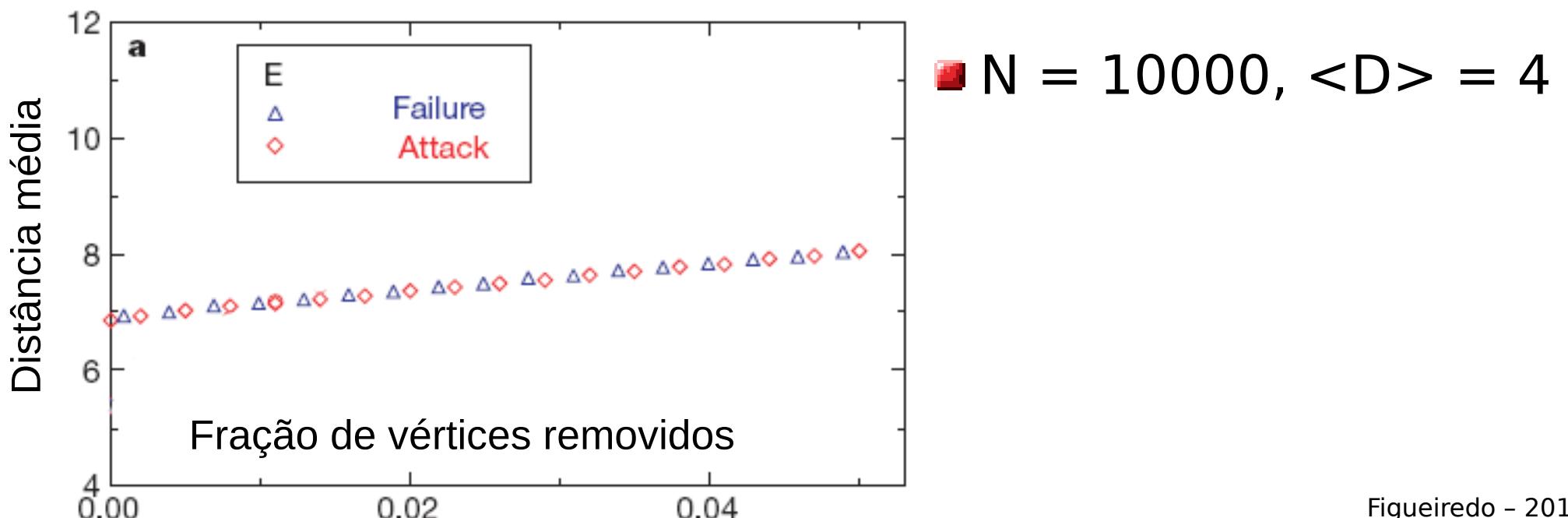
- Robustez da rede na presença de falhas
 - Aleatórias (uniforme), determinística (grau)
 - Ex. distância média entre pares
- Diferença com relação ao tipo de falha?
 - para uma mesma fração que falha
- Influência da topologia da rede?
 - para mesmo n e grau médio

Modelo G(n,p)? Modelo BA?

Falhas no G(n,p)

■ Intuição?

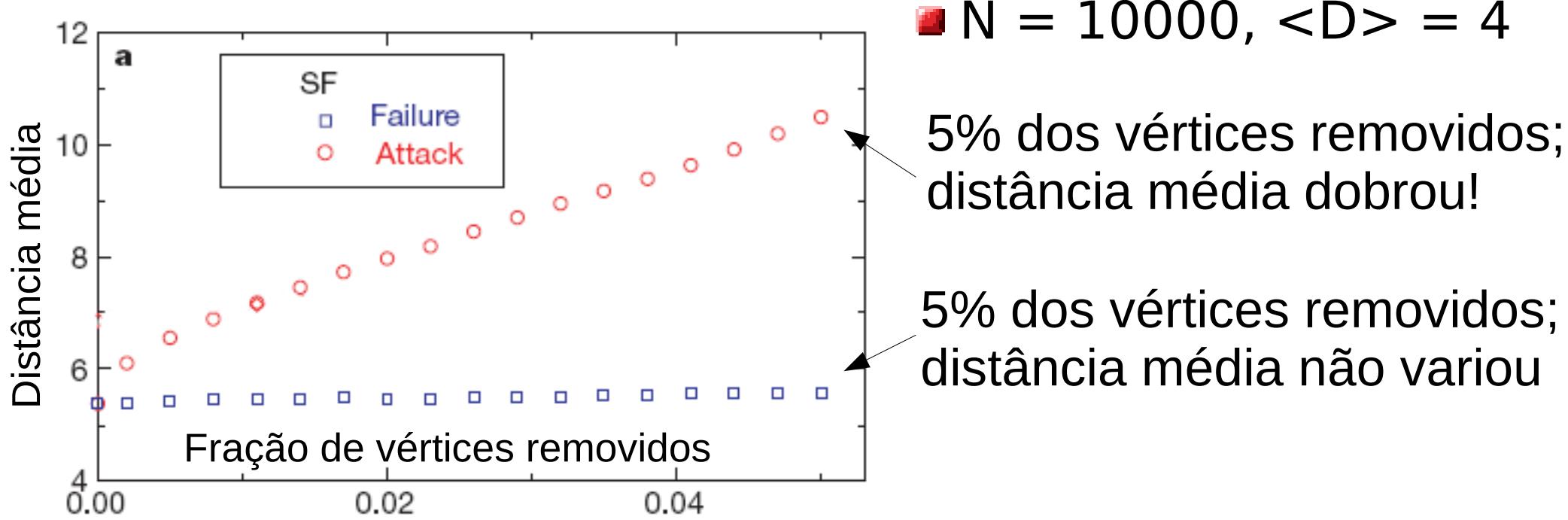
- Falhas aumentam (mas não muito) a distância média entre vértices
- Falhas aleatórias se parecem com falhas determinísticas
 - grau máximo é próximo ao grau médio



Falhas no BA

■ Intuição?

- Falhas aleatórias **não** se parecem com falhas determinísticas
- Falhas aleatórias: pouco impacto
falhas determinísticas: muito impacto



Falhas Aleatórias

- ❑ Modelo BA, lei de potência



- ❑ Remoção aleatória (uniforme)
- ❑ Pouco impacto, rede robusta

Falhas Determinísticas

- ❑ Modelo BA, lei de potência
- ❑ Remoção por ordem decrescente do grau



- ❑ Impacto devastador
- ❑ Estrutura tem papel fundamental

Modelo BA

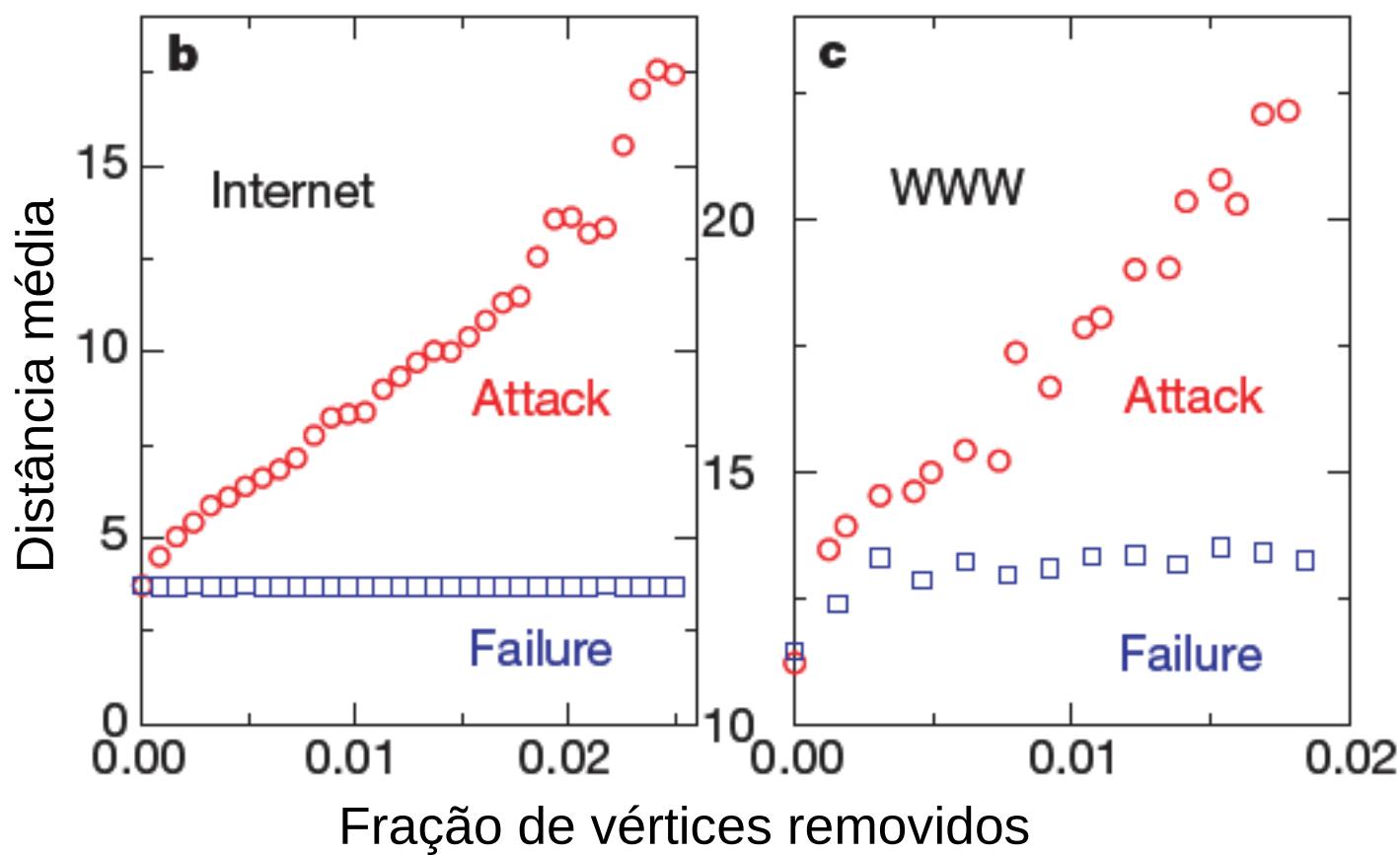
- Distribuição do grau segue lei de potência
 - Maioria dos vértices tem grau pequeno
 - Pouca importância na rede
- ↓
- Tolerante a falhas aleatórias
 - Poucos vértices com grau grande
 - Interconectam a rede
- ↓
- Vulnerável a ataques direcionados

Propriedade de redes livre de escala!

Robustez em Redes Reais

- WebGraph, AS Graph

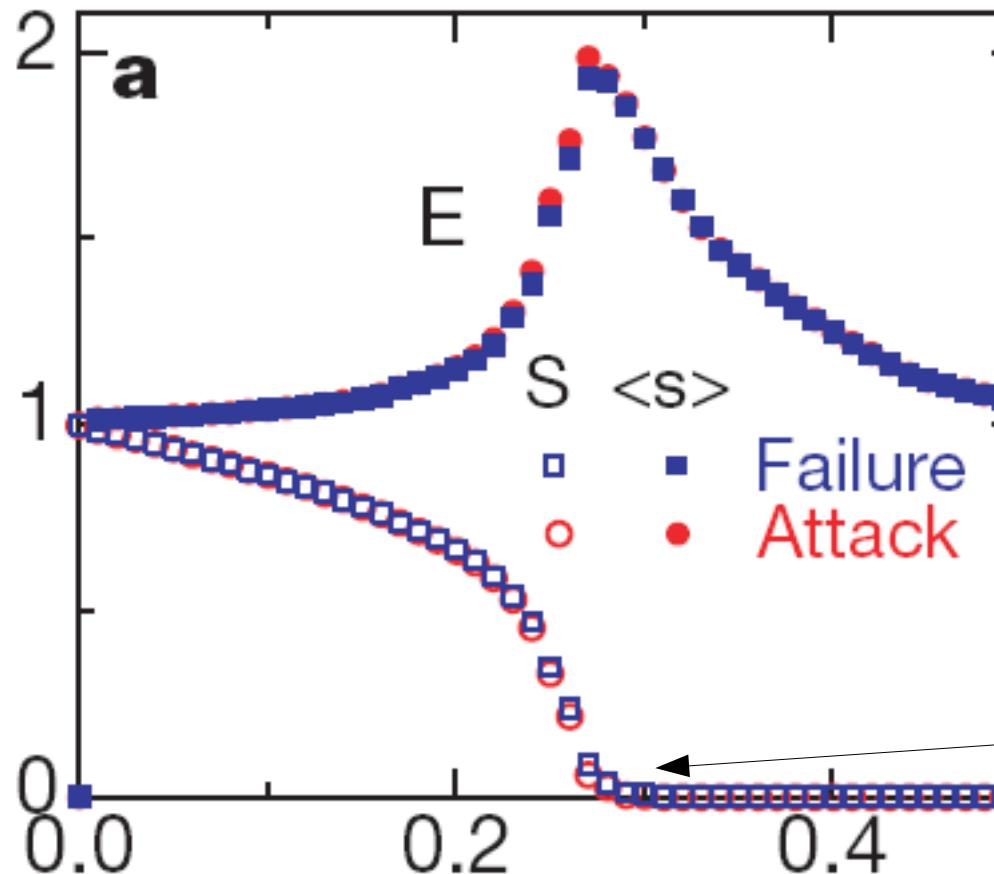
- Redes seguem lei de potência no graus



- Comportamento parecido com modelo BA
- Tolerante a falhas, vulnerável a ataques
- AS não é roteador!

Outras Métricas

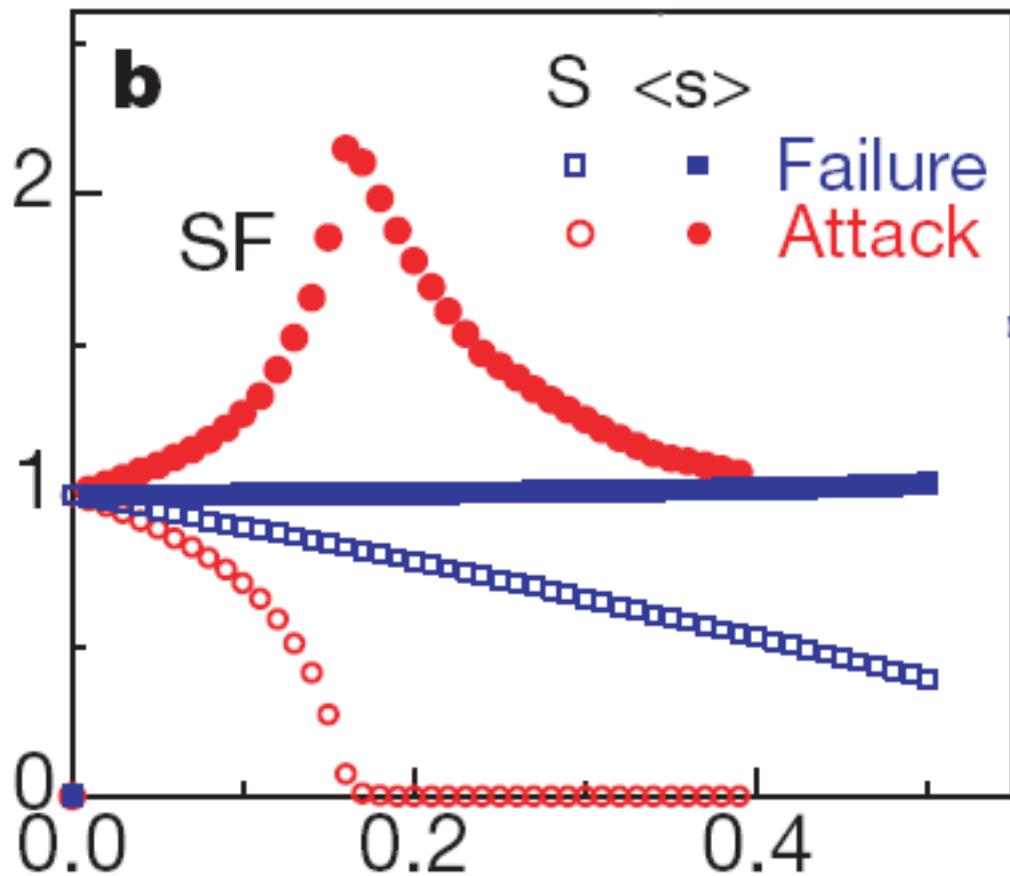
- Tamanho relativo da componente gigante (GCC)
- Tamanho médio das outras componentes
- Intuição $G(n,p)$?



- Falhas eventualmente destroem componente gigante
 - Tamanho médio das outras componentes vai a um
 - Rede despedaçada!
- Transição de fase?

Outras Métricas

- Intuição para modelo BA?
- Falha aleatória diferente de falha determinística



- Decrescimento linear tamanho relativo da GCC
- Tamanho médio das outras CC é 1
- Rede despedaçada para falhas direcionadas
- Despedaça antes da $G(n,p)$

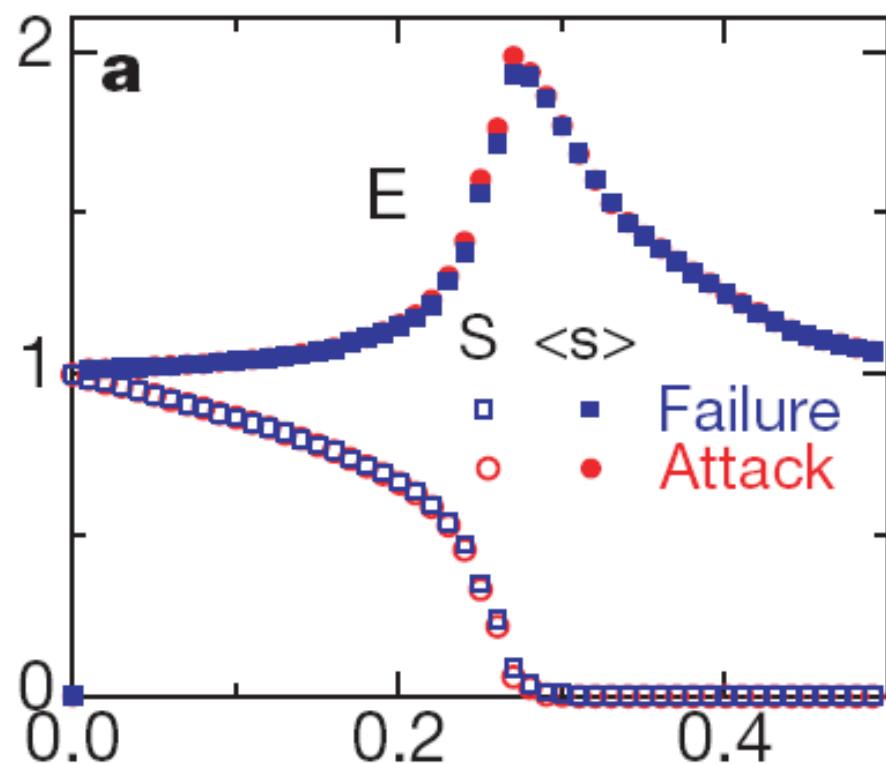
Transição de Fase

- Tamanho relativo da componente gigante
 - vai a zero rapidamente, para p grande suficiente

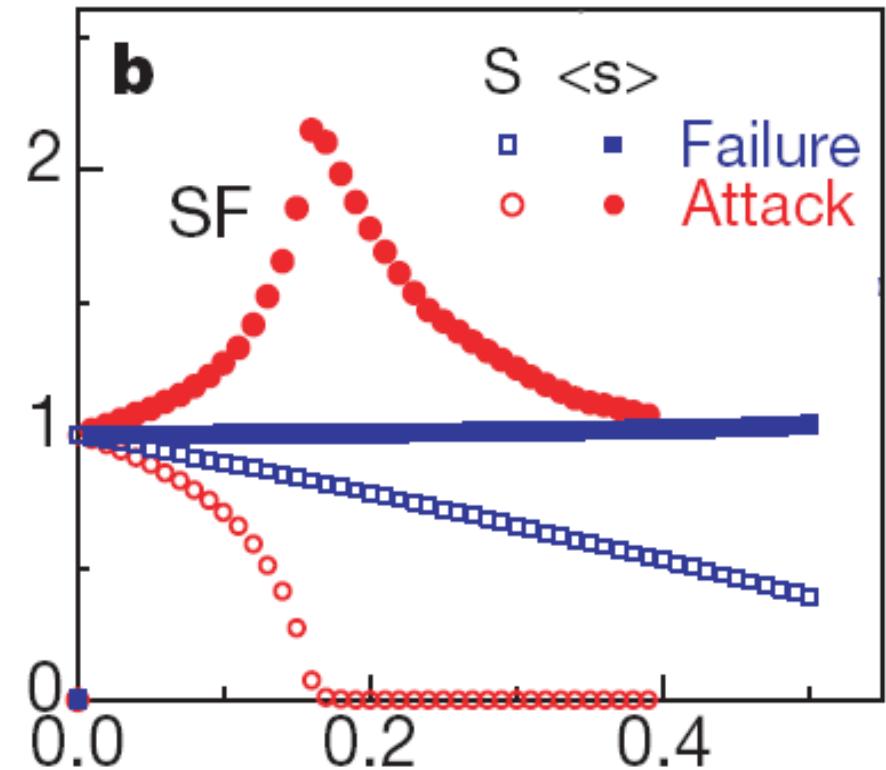
Valor de p que desintegra GCC?

- Depende do modelo de falhas
 - Aletório ou determinístico
- Depende da estrutura
 - $G(n,p)$, BA, etc

Tamanho da Maior CC



■ $G(n,p)$, indiferente quanto ao tipo de falha



■ BA, “robusta enquanto frágil”

Estudo Analítico

- GCC : componente conexa gigante
 - maior componente conexa tem ϵn vértices, para algum $\epsilon > 0$, a.a.s.
- Condição (aprox) para termos uma GCC em um grafo aleatório qualquer
$$E[d_i|i=j] > 2 \quad , \text{ para todos vértices } i, j \text{ dentro da GCC}$$
- Valor esperado do grau de i, dado que i e j são vizinhos
- Intuição?
- Condição no $G(n,p)$?
- $E[d] > 1$

Condição Equivalente

- Condição (aprox) para termos uma GCC em um grafo aleatório qualquer

$$E[d_i|i-j] > 2 \quad \longleftrightarrow \quad \kappa = \frac{E[d^2]}{E[d]} > 2$$

- Depende apenas do primeiro momento $E[d]$ e do segundo momento $E[d^2]$ da distribuição do grau dos vértices!
- Distribuição do grau dos vértices depois da falha determina existência do GCC
- Problema: calcular dois momentos da distribuição (depois da remoção)!

Distribuição do Grau

- Considere distribuição de grau original
 - $P[D = k]$, é dada
- Após falha dos vértices, qual nova distribuição do grau?
 - $P[D' = k]$
- Depende do modelo de falhas!
- Assumir modelo aleatório (uniforme)
- Obs: remover uma fração p dos vértices equivale a cada vértice deixar de existir com probabilidade p

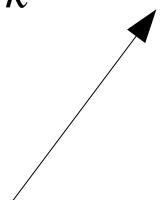
Distribuição do Grau

- Dado grau original k , probabilidade do grau ser k' após falha?

$$P[D' = k' | D = k] = \binom{k}{k'} (1-p)^{k'} p^{k-k'}$$

- Descondicionando

$$P[D' = k'] = \sum_{k=k'} P[D = k] \binom{k}{k'} (1-p)^{k'} p^{k-k'}$$



Distribuição original
(antes das falhas)

Momentos e Ponto Crítico

- Podemos então calcular os momentos de D' (distribuição do grau após falhas)

$$E[D'] = E[D](1 - p)$$

$$E[D'^2] = E[D^2](1 - p)^2 + E[D]p(1 - p)$$

- Usando a condição, podemos determinar o ponto crítico, p_c

$$p_c = 1 - \frac{E[D]}{E[D^2] - E[D]}$$

←
Momentos da
distribuição de grau
original (pré-falhas)

- Valores menores mantém uma GCC

Grau Segundo Lei Potência

- Ponto crítico em redes cujo grau segue lei de potência

$$p_c = 1 - \frac{E[D]}{E[D^2] - E[D]}$$

- Lei de potência: $P[D=k] = C k^{-\alpha}$
- Para $\alpha < 3$, o que acontece?
- Momentos divergem! Logo, $p_c = 1$
- Não existe transição de fase!
- GCC nunca se desintegra (quando n tende infinito)
- Rede é altamente tolerante a falhas!

Grau Segundo Lei Potência

- Para $\alpha > 3$, o que acontece?
- Temos os dois momentos defindos
 - Dependem de α (exponente)
- Relação aproximada entre p_c e α
 - detalhes no artigo
- Intuição?
 - Maior α menor é o valor de p_c

Generalizando Análise

- Análise anterior para falhas aleatórias (uniforme)
- Generalização para falhas aleatórias em função do grau
- Generalização para falhas determinísticas
 - função do grau
- Análise do ponto crítico, do tamanho das componentes gigante, tamanho médio das outras componentes
- Análise via percolação e função geradora

Mais detalhes no artigo!