Redes Complexas
Aula 16

Aula passada

- Partição e bisseção em grafos
- Modularidade
- Algoritmos de Newman e Louvain
- Limitações

Aula de hoje

- Epidemia em redes
- Modelos epidemiológicos
- Criticalidade em função da estrutura

Epidemia

O que é uma epidemia?

- Processo de contágio

1) Quem está sendo contagiado?

2) O que está sendo transmitido?

Sendo contagiado

- Pessoas, animais, plantas, laptop, browser, ...

Sendo transmitido

- vírus, bacteria, ideia, app, boato, medo, música, ...

Processo fundamental (sociedade e natureza)

Modelando Epidemia

Como representar uma epidemia?

- 1) Quem (o que) pode ser contagiado?
- 2) Como contágio pode ser contraído?
- 3) O que ocorre depois do contágio?

Modelos epidemiológicos!

- Tema antigo: primeiros estudos por Bernoulli, 1766
- Interdisciplinar: matemática, física, biologia, economia, computação (mais recente), ...
- Modelo aclamado de Kermack–McKendrick, 1927
  - baseado em equações diferenciais
- Ainda é tema muita de pesquisa hoje!

Modelo Clássico

- Considera uma população de indivíduos
- Cada indivíduo está em um estado

S	I	R
Susceptível: pode contrair contágio	**Infectado**: está contagiado	**Removido**: não pode mais ser contagiado

- Indivíduos transicionam entre estados
- Tipo de epidemica determina transições
  - SI : transição apenas de S → I
  - SIS : transição de S → I e de I → S
  - SIR : transição de S → I e de I → R

Modelo Clássico

Como transições ocorrem?

- Depende da epidemia específica
- Depende de como indivíduos se “encontram”

- Homogeneidade populacional
  - indivíduos se misturam e se encontram uniformemente
  - ignora “estrutura” populacional
- Premissa comum (até surgimento de redes)
  - facilita análise matemática; representa falta de conhecimento específico
- Modelagem com equações diferenciais
  - modelos de Kermack–McKendrick (1927)

Modelagem via EDO

- População com N indivíduos
- S(t): número de suscpetíveis no tempo t
- I(t): número de infectados no tempo t
- R(t): número de removidos no tempo t
- β: taxa de contato de indivíduo
- $1/\gamma$: tempo até recuperar (removido)

- **Equações de uma Epidemia SIR**

$$\frac{dS}{dt} = -\beta S I \qquad \frac{dI}{dt} = \beta S I - \gamma I \qquad \frac{dR}{dt} = \gamma I$$

- Equações diferenciais descrevem evolução da população
  - equilíbrio das equações (longo prazo)

Mundo de Estruturas

- Chance de você ficar gripado depende muito mais dos seus amigos do que população geral
- Epidemias ocorrem sobre estruturas

Como modelar estrutura?

↓

Redes

Epidemia em Redes

- Qual é o papel da estrutura na epidemia?
- Tema recente de estudo, início de NetSci

Epidemic spreading in scale-free networks

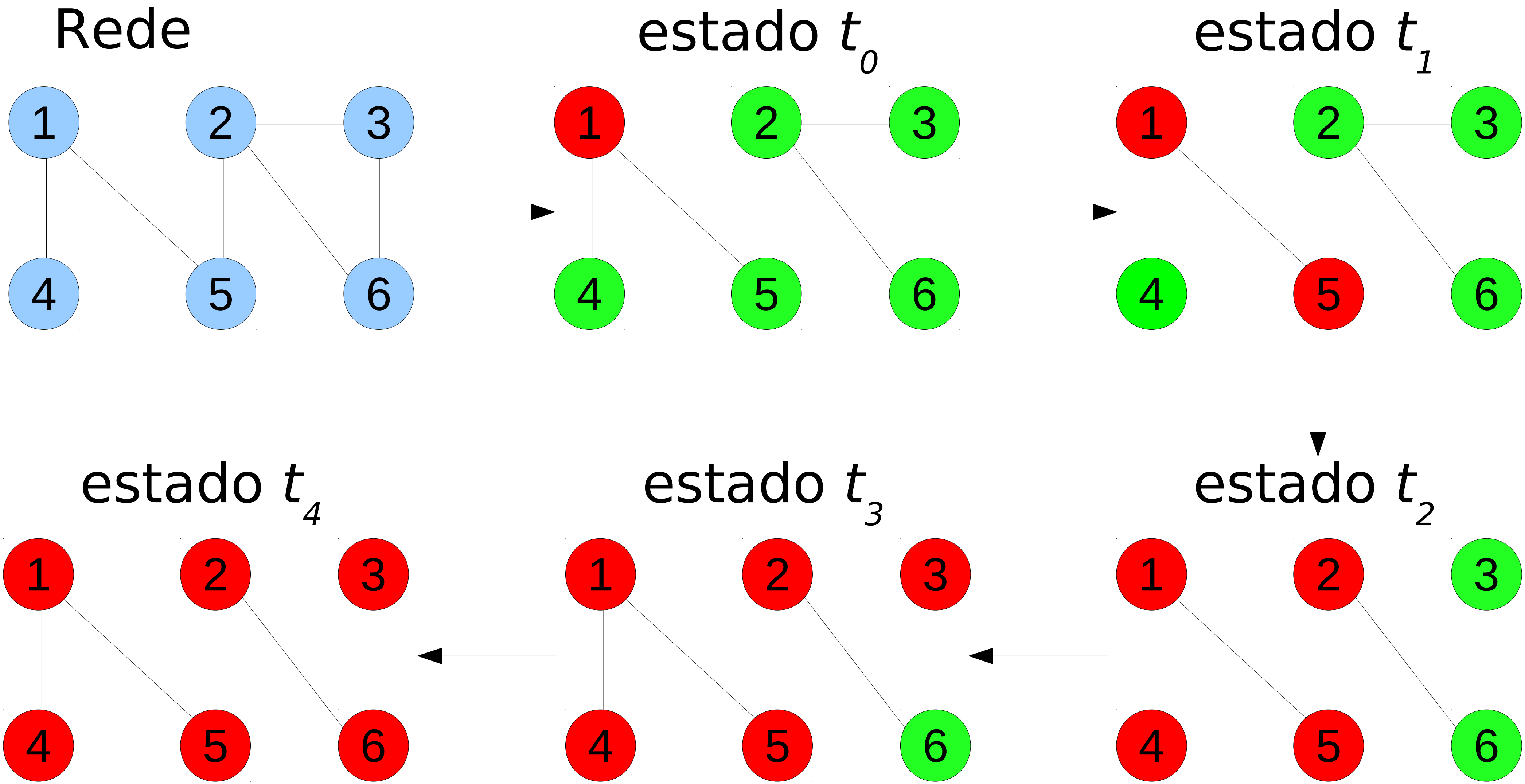
R Pastor-Satorras, A Vespignani - Physical Review Letters (PRL), 2001 – **5000+ citações!**

Epidemia em Redes

- Vértices: pessoas (ou entidades)
- Arestas: possibilidade de infeção
  - se *i* pode infectar *j*, então existe aresta (*i*, *j*)
- Vértices possuem estado (que varia no tempo) de acordo com modelo epidemiológico
  - S, I, R
- Contágio ocorre através das arestas da rede
  - *i* só pode ser infectado se possui ao menos um vizinho infectado

Exemplo - SI

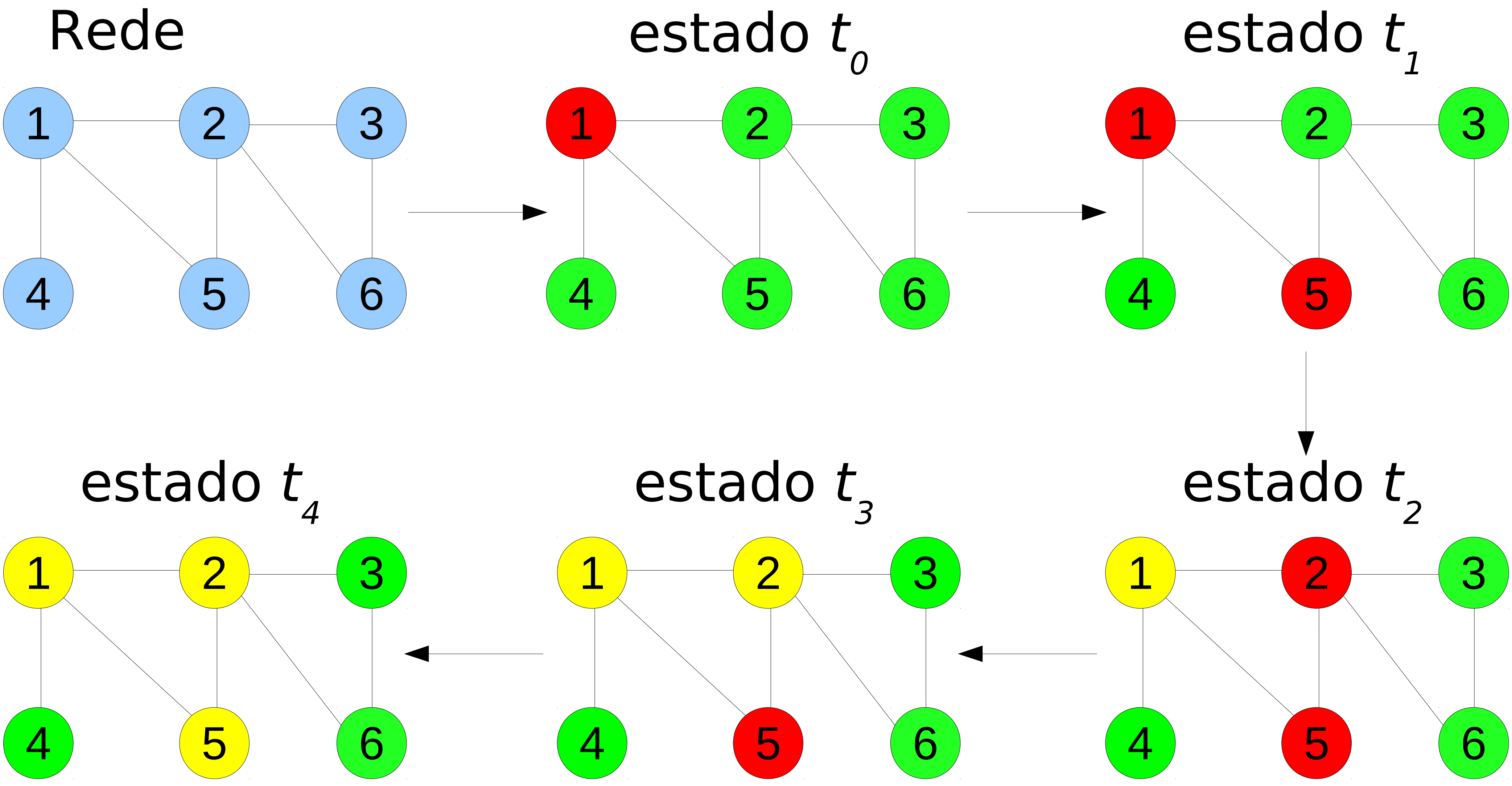
- Modelo SI: S = verde, I = vermelho



- Componente conexo completamente infectado

Exemplo - SIR

- Modelo SIR: S = verde, I = vermelho, R = amarelo



- Componente conexo parcialmente infectado

Figueiredo – 2013

Modelos de Contágio

- Como contágio ocorre através das arestas?

- Evolução do tempo: discreto ou contínuo
- Regra de decisão: aleatória ou determinística
- Modelo Threshold (discreto e determinístico)
  - vértice infectado em t+1 se possui ao menos k vizinhos infectados no tempo t
- Modelo Exponencial (contínuo e aleatório)
  - taxa de infecção do vértice é β vezes número de vizinhos infectados
- Muitos outros modelos e variações

Avaliando Epidemias

- Como avaliar epidemias em rede?
- Epidemia depende da estrutura
  - precisamos de modelo para estrutura
- Interesse no longo prazo: o que ocorre no “final” da epidemia?
  - facilita análise teórica
- Modelos aproximados do comportamento da epidemia
  - simplificação do modelo de contágio, etc
- **Simulação:** alternativa (muito usada) para avaliação da epidemia
  - *Computational epidemiology* (capa da CACM 7/2013)

Modelagem Aproximada

- Modelo SIR, contágio probabilístico
- Comportamento médio de longo prazo
- Fração de vértices que foram infectados (f_R)
- Probabilidade de contágio através da aresta

$$q = 1 - e^{-\beta\tau}$$

β: taxa de transmissão (virulência)
τ: tempo até recuperação

- Ideia: 1) assumir que cada aresta é "sorteada" iid
  2) determinar tamanho das comp. conexas
  3) todos vértices das CCs que possui infectados em t=0 estão em R

Problema de *bond percolation* em redes

Modelo SIR – Rede Poisson

- Assumir modelo de rede Poisson
  - uniforme, bem similar ao G(n,p)
- Ponto crítico para percolação
  - maior CC gerada tem θ(n) vértices

$$q_c = 1/z$$

z: grau médio da rede

- Seja *q* maior que ponto crítico para percolação, então temos:

$$f_R = 1 - e^{q z f_R}$$

f_R: fração da população infectada

- Fração infectada depende da probabilidade de transmissão (q) e grau médio (z)

Modelo SIR – Rede Lei Potência

- Assumir modelo de rede com lei de potência
  - expoente 2 < a < 3 ; variância infinita (grau)
- Ponto crítico para percolação

$$q_c = 0$$

Sempre teremos percolação!
(segundo momento diverge)

- Sempre teremos epidemias
  - qualquer q será maior que q_c
- Epidemias sempre atingirão toda a rede!
  - idenpendente do valor de q

$$f_R \approx 1$$

Importância da estrutura!