Redes Complexas
Aula 2

Aula passada

- Logística e regras
- Redes por todos os lados
- Redes Complexas

Aula de hoje

- Representando redes
- Falando sobre redes
- Grau, distância, clusterização
- Características de redes reais

Rede

- Abstração que permite **codificar** relacionamentos entre **pares** de objetos

objetos → vértices do grafo

relacionamentos → arestas do grafo

Exemplos?

Do que se trata Redes Complexas?

- Entender como e porque as coisas se conectam e as consequências desta conectividade

"Coisas que se conectam" → **Redes**

"Como, por que, e consequências" → **Complexo**

- ***Estrutura*** assume papel central
  - o necessária para compreender fenômenos que ainda não explicamos
- A rede não é complexa!

Objetos e Relacionamentos

- Sobre objetos
  - idênticos, diferentes tipos, possuir estado (rótulos)
  - ex. pessoas, homens e mulheres, nascimento
- Sobre relacionamentos
  - simétricos, assimétricos, diferentes intensidades (pesos), negativos
  - múltiplos relacionamentos na mesma rede
  - ex. amizade, colaboração, interação, confiança, ...

Rede captura estrutura do sistema

Classe de Redes

- **Redes sociais**: relacionamento entre pessoas ou grupo de pessoas
- **Redes de informação** (de conhecimento): codificam associação entre informação
- **Redes tecnológicas**: construída pelo homen geralmente para distribuir *commodities*
- **Redes biológicas**: codifica relacionamentos em sistemas biológicos

Classificação para referência

- *Twitter*: rede social ou rede de informação?

Como Falar sobre Redes?

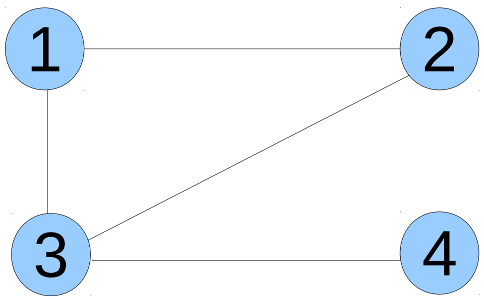
- Desenho da rede: “figura vale por mil palavras”
- Não funciona para redes grandes

Descrever estrutura da rede!

- **Matriz de adjacência**
- Matriz *n* x *n* (*n* é número de vértices)
  - $a_{ij} = 1$, se existe aresta entre vértices *i* e *j*
  - $a_{ij} = 0$, caso contrário
- Codifica todos os relacionamentos da rede
- Generaliza com pesos, pode ser assimétrica

Matriz de Adjacência

- Exemplo



	1	2	3	4
1	0	1	1	0
2	1	0	1	0
3	1	1	0	1
4	0	0	1	0

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

?

Matriz de Adjacência

- Problema em descrever a estrutura com matriz de adjacência?
- Possui toda a informação mas pouco intuitiva
- **Matriz é o DNA da rede**
  - Como descrever uma pessoa? Através do seu DNA?

Precisamos de resumos da estrutura!

- Resumos que ajudem a entender a estrutura de forma intuitiva

Características de Redes

- Caracterísiticas estruturais são resumos da estrutura
  - ex: tamanho, densidade, graus, distâncias, clusterização, centralidade, homofilia, etc
- Dão ideia geral da estrutura da rede

- Quais características devem ser avaliadas? Quais são importantes?
- Depende do propósito!
- Como gens que formam o DNA, estamos apenas começando a enteder seu significado

Característica Importante

- O que faz uma característica ser importante?

1) Prever (determinar) comportamento geral de algum processo

  - independente de outras características

2) Influência sobre diferentes processos

- Exemplo: distribuição de grau
  - determina comportamento de passeios aleatórios
  - influencia outros processos (epidemia)
- Não conhecemos muitas características fundamentalmente importantes
  - a serem descobertas (como gens importantes)

Vértices e Arestas

- Número de vértices de um grafo
  - n = |V|

cardinalidade
do conjunto

- Número de arestas de um grafo
  - m = |E|
- Dado G = (V, E), qual é o maior número de arestas de G?
  - número de pares não ordenados em um conjunto de *n* = |V| objetos

$$\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2} \leq n^2$$

- Densidade: fração de arestas que o grafo possui

$$\rho = \frac{m}{\binom{n}{2}} = \frac{2m}{n(n-1)}$$

Grau

- Número de arestas (relacionamentos) incidente em um vértice
  - g(u) : grau do vértice u

- Como falar sobre o grau dos vértices da rede?
- Como falar de uma característica sobre um conjunto de objetos?
- Média, desvio padrão: um número
- Distribuição empírica: todos os graus – comportamento geral

Grau Médio

- Grau médio do grafo considerando todos seus vértices

$$\bar{g} = 1/n \sum_{u \in V} g(u)$$

Grau do vértice u

- Também pode ser calculado diretamente

$$\sum_{u \in V} g(u) = 2m$$

- Cada aresta tem duas pontas!
- Logo temos $\bar{g} = 2m/n$

Distribuição do Grau

- Distribuição empírica do grau dos vértices
  - frequência relativa do grau

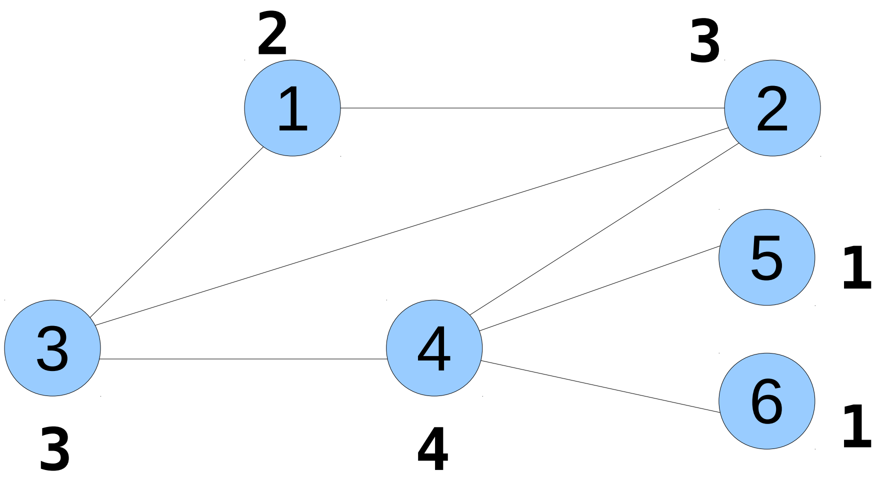
$$f_k = \frac{\text{Número de vértices com grau k}}{\text{Número total de vértices}}$$

fração de vértices com grau k

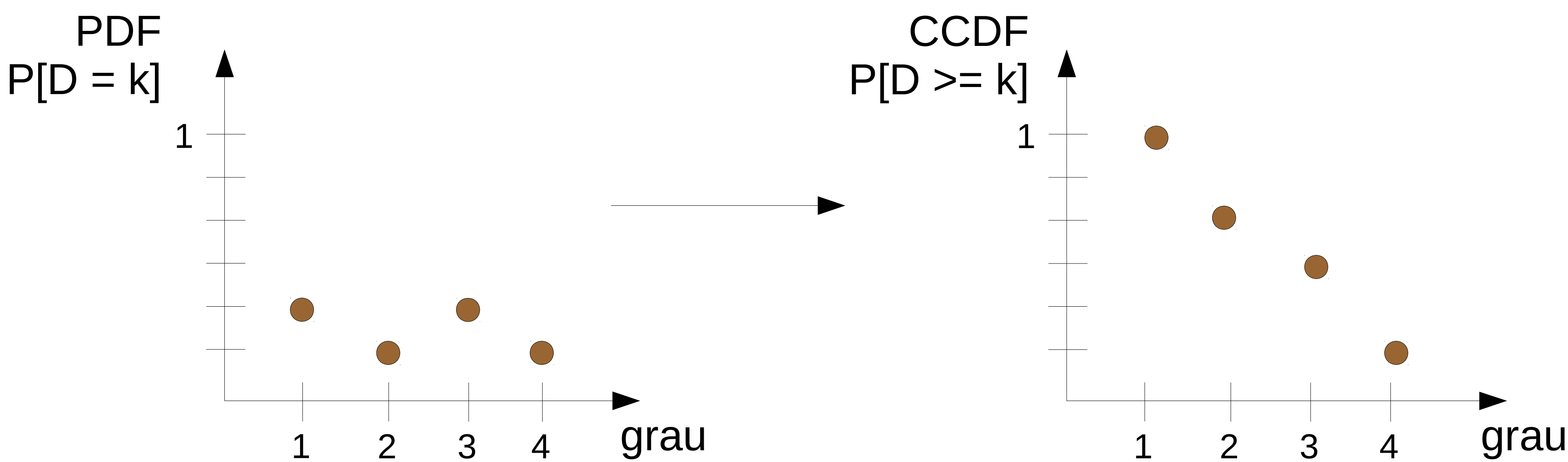
- CCDF empírica (*Complementary Cumulative Distribution Function*)
  - fração de vértices com grau >= k

$$F_k = 1 - \sum_{i=0}^{k-1} f_k$$

Exemplo de Distribuição



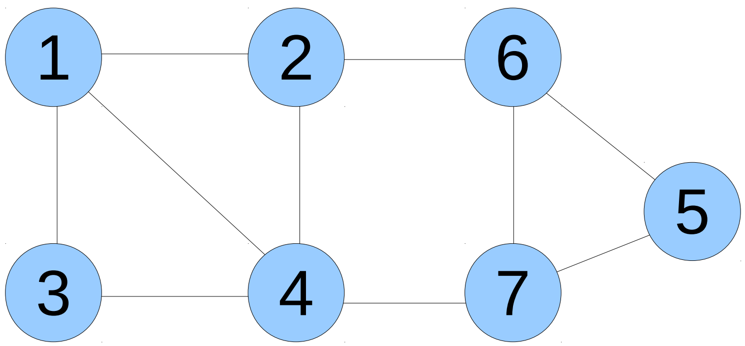
- Distribuição empírica de grau?



Figueiredo – 2015

Distância

- Comprimento do **menor** caminho entre dois vértices
- Função d(u,v), onde u e v são vértices
  - não definido quando não há caminho



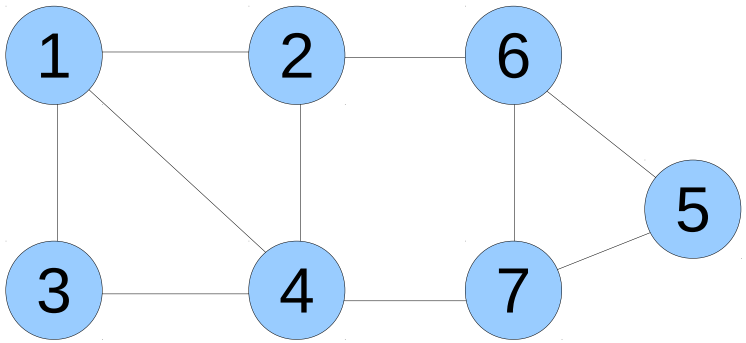
- Exemplo
  - d(6, 3) = ?
  - d(7, 1) = ?

- **Importante**: muitos caminhos podem realizar a distância entre dois vértices

Distância Média e Diâmetro

- Distância média do grafo
  - média entre todos os pares de vértices

$$\bar{d} = \frac{\sum_{u,v \in V} d(u,v)}{\binom{n}{2}}$$



- **Excentricidade**: maior distância de um vértice a todos os outros

$$e(u) = max_{v \in V}\, d(u,v)$$

- **Diâmetro**: maior distância entre dois vértices da rede

$$r = max_{u,v \in V}\, d(u,v)$$

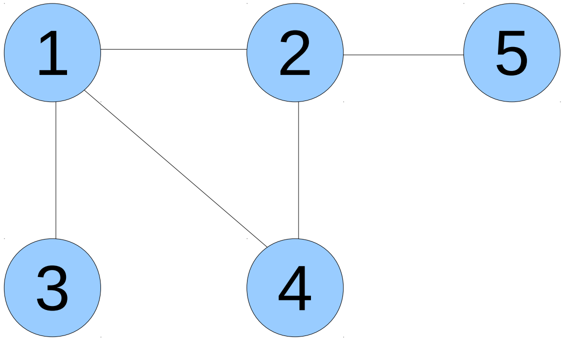
Distribuição da Distância

- Distribuição empírica da distância entre os vértices do grafo
  - frequência relativa das distâncias

$$f_D(d) = \frac{n(d)}{\binom{n}{2}}$$

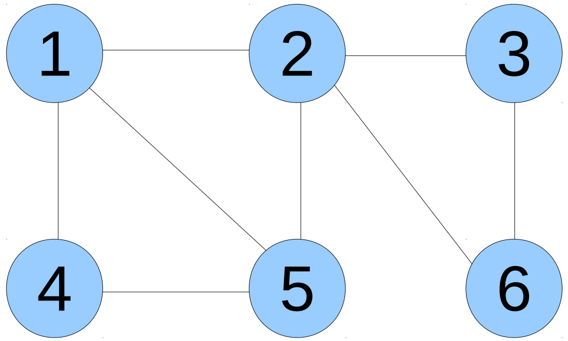
Número de pares não ordenados de vértices que tem distância d

- Exemplo



Clusterização

- Medida da propenção de triângulos se formarem na rede
  - triângulo: ciclo de comprimento três
  - quase-triângulo: caminho de comprimento dois



- Duas métricas na literatura
  - métrica local: cada vértice tem o seu
  - métrica global: uma para a rede

Clusterização – I

- Fração de aresta entre vizinhos
  - prob. de dois vizinhos também serem vizinhos
- Definida para cada vértice da rede

$$C_i = \frac{E_i}{\binom{d_i}{2}}$$

E_i : # de arestas entre os vizinhos de i

d_i : grau do vértice i

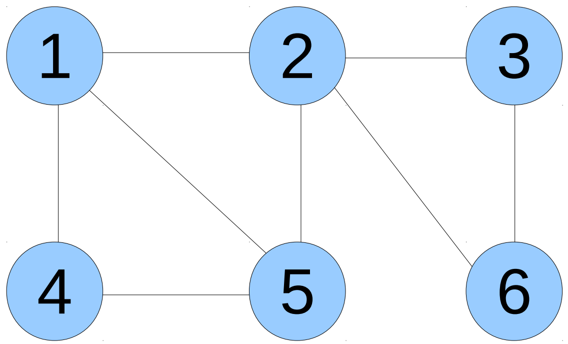
$$C_i = \frac{2E_i}{d_i(d_i - 1)}$$

- Clusterização do grafo
  - média da clusterização dos vértices

$$C = 1/n \sum_{v \in V} C_i$$

Calculando Clusterização

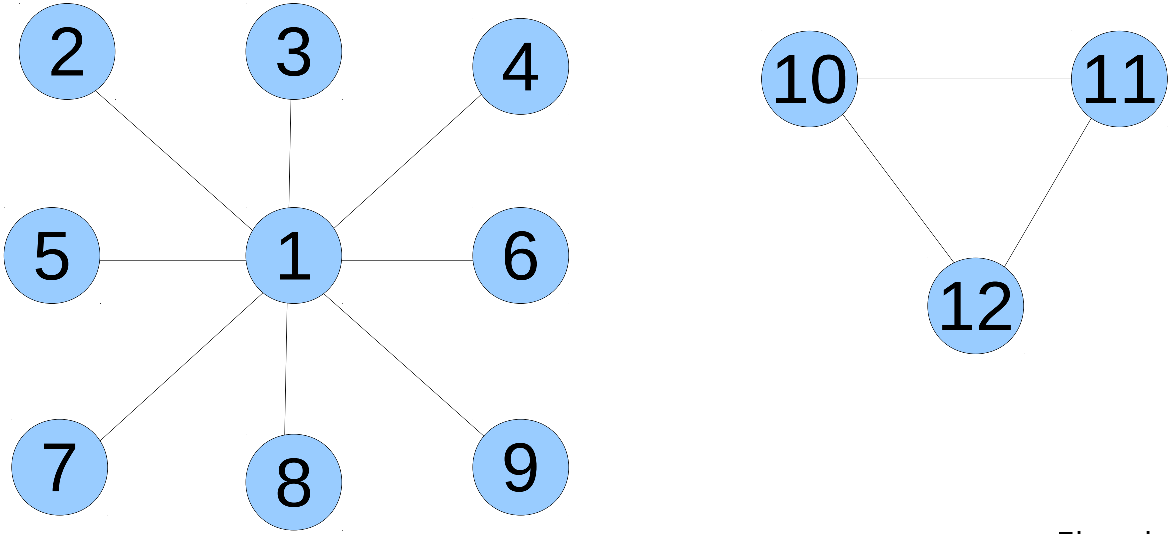
- Exemplo



- Quanto vale C?

Clusterização – I

- **Problemas?**
- Não é a fração de arestas entre vizinhos do grafo (como um todo)
- Favorece vértices com menos vizinhos
  - denominador é ~ d_i^2
- Clusterização para grau 0 e 1?
- Exemplo?



Clusterização – II

- Fração entre o número de triângulos e o número de pseudo-triângulos no grafo como um todo
  - pseudo-triângulo: tripla conectada

$$C' = \frac{3 \text{ x número de triângulos}}{\text{número de triplas conectadas}}$$

Cada triângulo dá origem a três triplas conectadas

- Tripla é não-ordenada (“a,b,c” igual a “c,b,a”)
- Métrica global
  - não é média dos vértices
- Não tem problemas com vértices de grau 0 e 1
  - mais bem comportada a anomalias
- Valor pode ser muito diferente da outra definição

Clusterização – II

- Definição equivalente (mesmo valor)
- Pseudo-triângulo: caminho de comprimento dois
- Para cada vértice, número de vizinhos dos meus vizinhos = número de caminhos de comprimento dois
  - Mais fácil de calcular computacionalmente

$$C' = \frac{6 \text{ x número de triângulos}}{\text{número de caminhos de comprimento 2}}$$

Cada triângulo dá origem a seis caminhos de comprimento 2

- Igual a métrica anterior, mas agora a tripla é ordenada: (a,b,c) != (c,b,a) logo, conta duas vezes

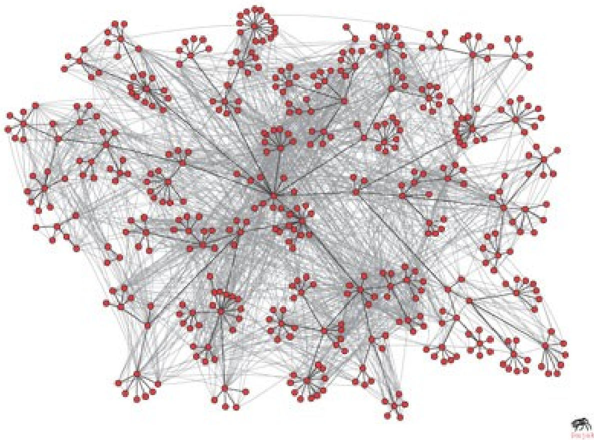
Quatro Importantes Características

- Observada em diversas redes reais
  - a partir do final da década de 90

- Mundo pequeno

- Meus amigos são amigos

- Normalidade ausente



- Tudo Conectado

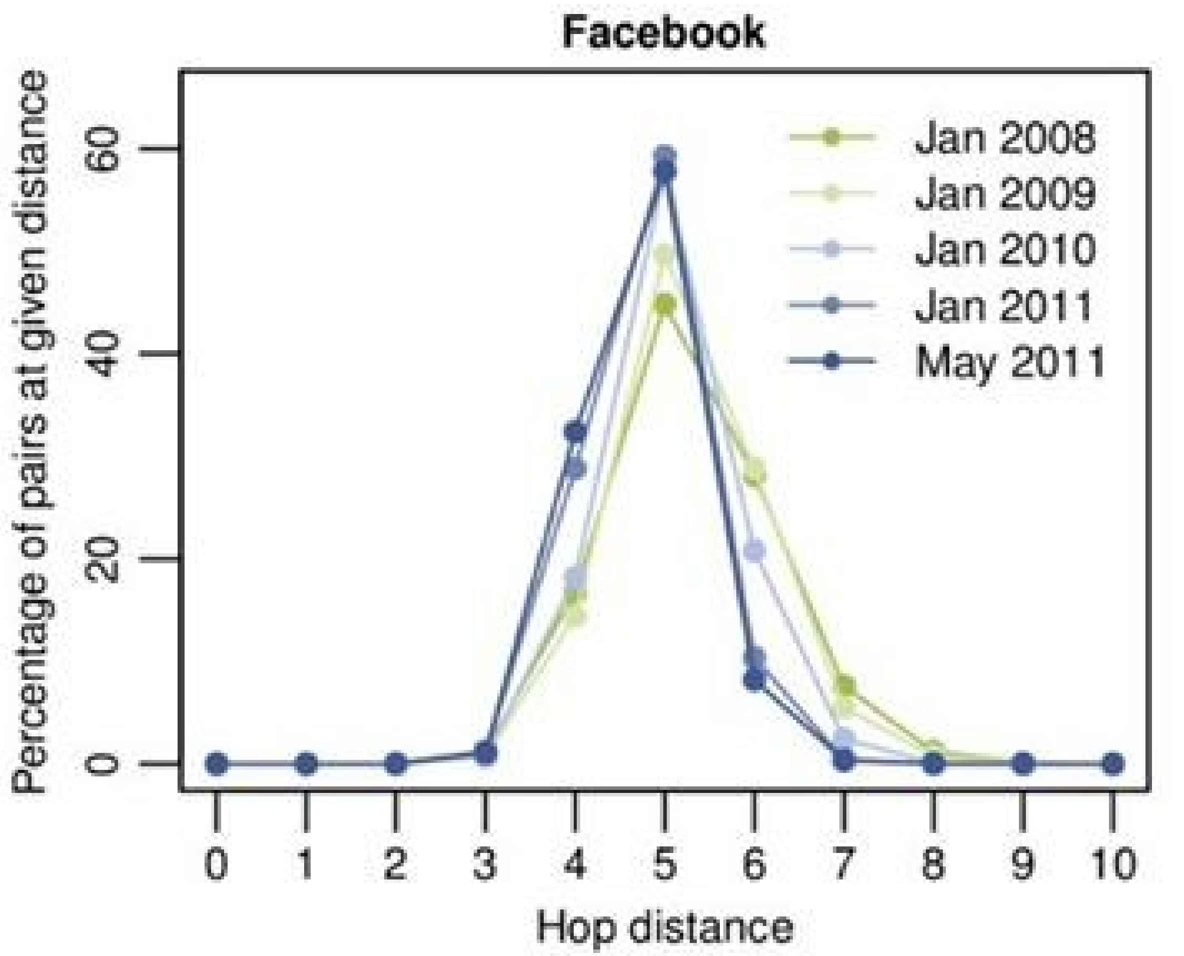
Mundo Pequeno

- *"It's a small world, after all"*
- Distância média **muito** pequena, diâmetro também
- Mesmo para redes muito grandes
  - Web (parte) – 10^8 vértices ← **7.5**
  - Rede de colaboração – 10^6 nodes ← **4.9**
  - Facebook - 10^9 nodes ← **4.5**
    - "seis graus de separação"
  - e muitas outras!

Ordens de grandeza menor!
Aparentemente da ordem de *log n*

Exemplo do Facebook

- Distribuição da distância ao longo do tempo (truncada em 10)



vértices (arestas)

	fb
2007	13.0 M (644.6 M)
2008	56.0 M (2.1 G)
2009	139.1 M (6.2 G)
2010	332.3 M (18.8 G)
2011	562.4 M (47.5 G)
current	721.1 M (68.7 G)

- Rede cresce (50 x), mas distância média diminui!
- current = 12/2011

Anatomy of Facebook, Lars Backstrom et al. 2011

Exemplo do Facebook

- Mudanças na rede

distância média (std)

	fb
2007	4.46 (±0.04)
2008	5.28 (±0.03)
2009	5.26 (±0.03)
2010	5.06 (±0.01)
2011	4.81 (±0.04)
current	4.74 (±0.02)

grau médio

	fb
2007	99.50
2008	76.15
2009	88.68
2010	113.00
2011	169.03
current	190.44

densidade

	fb
2007	7.679E-06
2008	1.359E-06
2009	6.377E-07
2010	3.400E-07
2011	3.006E-07
current	2.641E-07

- Grau médio cresce
- Rede muito, muito esparsa
- Grau médio aumenta e densidade diminui?

Anatomy of Facebook, Lars Backstrom et al. 2011

Meus amigos também são amigos

- A relacionado com B e C faz com que B e C se relacionem mais provavelmente
- Rede possui transitividade – caminhos de comprimento dois viram triângulos
  - métrica: coeficiente de clusterização
  - densidade: chance de dois vértices ao acaso estarem relacionados

	clusterização	densidade
AS graph – 10^4 nodes	**0.39**	**0.00056**
Facebook – 10^9 nodes	**0.14**	**0.00000026**
Biology coauthorship	**0.67**	**0.00001**

Ordens de magnitude maior!

Normalidade Ausente

- Grau dos vértices é muito desigual
- Muitos com grau pequeno, poucos com grau muito grande

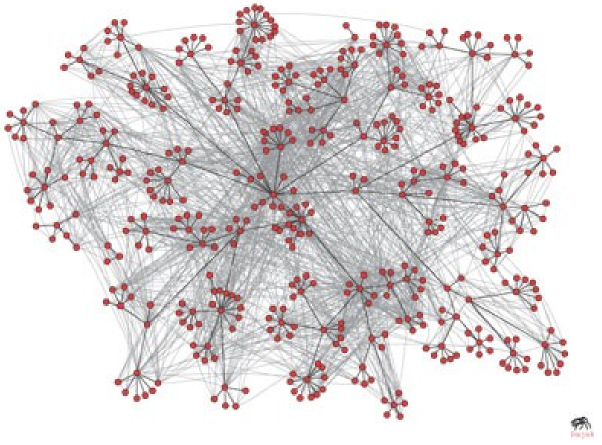
Parecido com distribuição da renda no Brasil!

- AS Graph – 10^4 nodes
  - Grau médio: **5.9**
  - Grau máx: ~**2100**
- Citações – 10^6 nodes
  - Grau médio: **8.6**
  - Grau máx: **~9000**

Distribuição de grau possui cauda pesada
Abrange diversas orders de grandeza

- Muito diferente de distribuição normal

Tudo Conectado



- Maior componente conexa possui **quase todos** os vértices
  - CC gigante
- Outras componentes muito pequenas
  - Muitas outras componentes
- Rede de sinônimos – 23K vértices
  - Maior componente: ~**22K**
- Rede social, rede neural, etc

Quase sempre quase completamente conectada!

Curiosidade

- **Fato I:** Muitas redes possuem propriedades estruturais peculiares (não esperadas)
  - grau, distâncias, clusterização, connectividade, etc
- **Fato II:** Muitas redes differentes possuem propriedades estruturais semelhantes
  - Web, Facebook, AS Graph, Neural network, etc

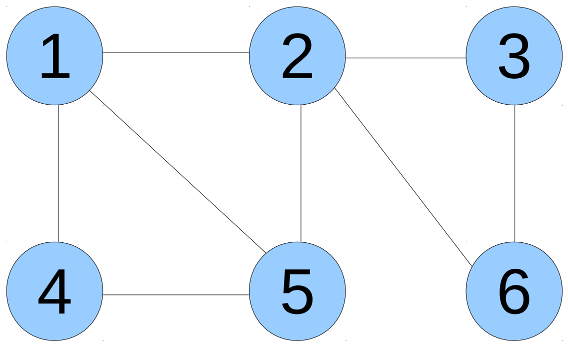
- “Million dollar question”

Por que?

- Algumas respostas na literatura, mas nada muito definitivo
- E você pode ajudar a explicar!

Calculando Clusterização

- Exemplo



- Quanto vale C?
- Quanto vale C'?