Cadeia de Markov

- Seja S o espaço de estados da CM, e P a matriz de transição de estados
- Seja X_t uma v.a. que determina o valor do estado da cadeia no instante de tempo t, para t = 0,1,2,...
- Estamos interessados em
  - P[$X_t = s$] = $\pi_s(t)$
- Sabemos que para um estado incial, temos

$$\pi(t) = \pi(t-1)P = \pi(0)P^t$$

Mas para onde vai π(t)?

  - será que depende em $\pi(0)$?

Possível Convergência

- Observação 1: X_t não converge
  - X_t passeia pela cadeia para sempre, trocando de estado
- Observação 2: P[$X_t = s_i$] pode convergir
  - Prob. de encontrar X_t no estado s_i, ou fração de vezes que X_t visita o estado s_i (intuitivamente)
- Estamos interessados em valores grandes de t

$$\lim_{t \to \infty} \pi(t) = \lim_{t \to \infty} \pi(0) P^t$$

  - mas temos que formalizar este limite

Encontrando π

- Ótima notícia, mas como encontrar π ?

1) Método iterativo

$$\pi(t)=\pi(t-1)P=\pi(0)P^t$$

- fazer iteração até critério de convergência

2) Método direto

$$\pi=\pi P$$

- resolver sistema de equações, adicionando a equação

$$\sum_i \pi_i=1$$

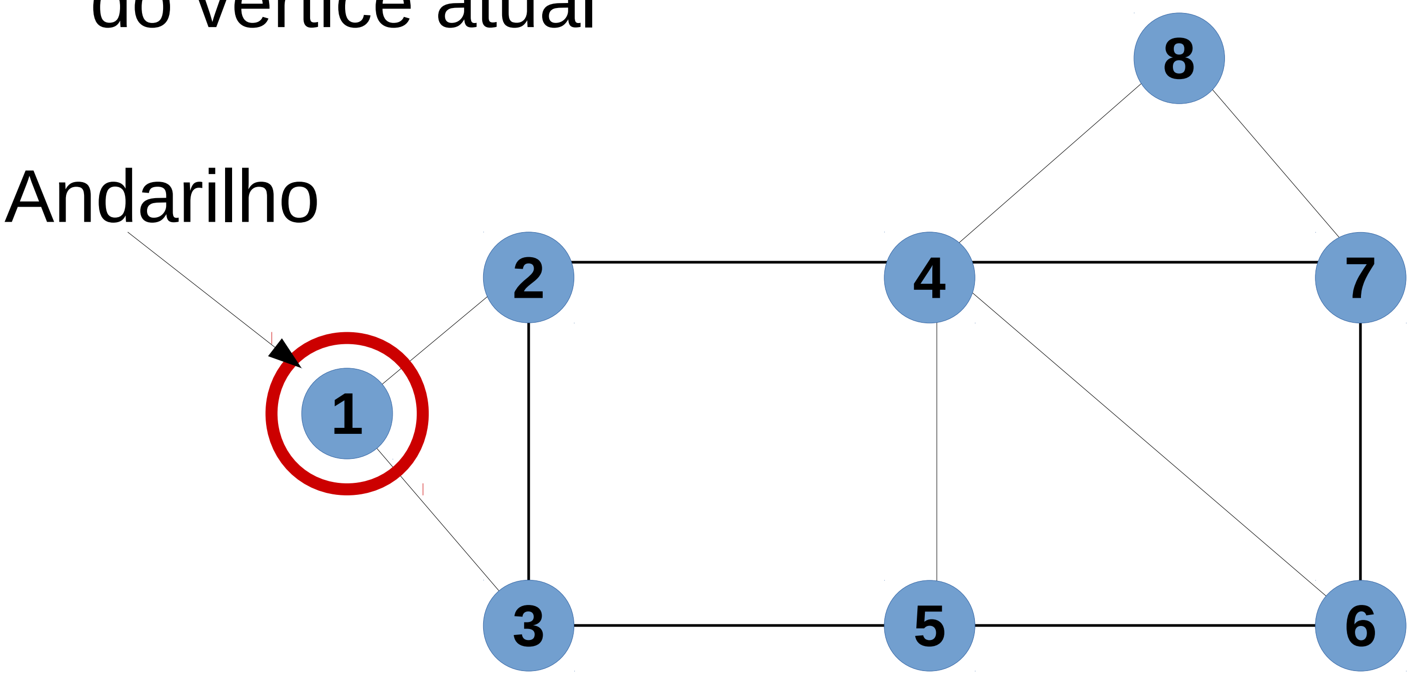
3) Monte Carlo

- Usar própria cadeia para gerar amostras para estimar π_i ou estimar τ_{ii} para todo s_i

Figueiredo 2018

Passeios Aleatórios

- Seja G=(V, E) um grafo não direcionado
- Considere um andarilho que passeia pelo grafo de forma aleatória, sem preferência e sem memória
  - escolhe uniformemente próximo vértice entre vizinhos do vértice atual



- $p_{12} = ½$, $p_{13} = ½$, $p_{21} = 1/3$, $p_{23} = 1/3$, $p_{24} = 1/3$, ...

Passeios Aleatórios

- Nosso andarilho induz uma cadeia de Markov sobre o grafo G
  - forma de colocar o grafo em "movimento"
- X_t : vértice onde andarilho se encontra no tempo t
- Matriz de transição de probabilidade

$$P = D^{-1} A$$

  - D^{-1} é a matriz diagonal com o inverso do grau de cada vértice
  - A é a matriz de adjacência de G

- Outra forma: $P_{ij} = 1/d_i$ se (i, j) são vizinhos, 0 c.c.
  - onde d_i é o grau do vértice i

Passeios Aleatórios

- Qual a distribuição estacionária do andarilho ?

$$\pi_i = \frac{d_i}{K} \qquad K = \sum_i d_i = 2m$$

m é o número de arestas em G

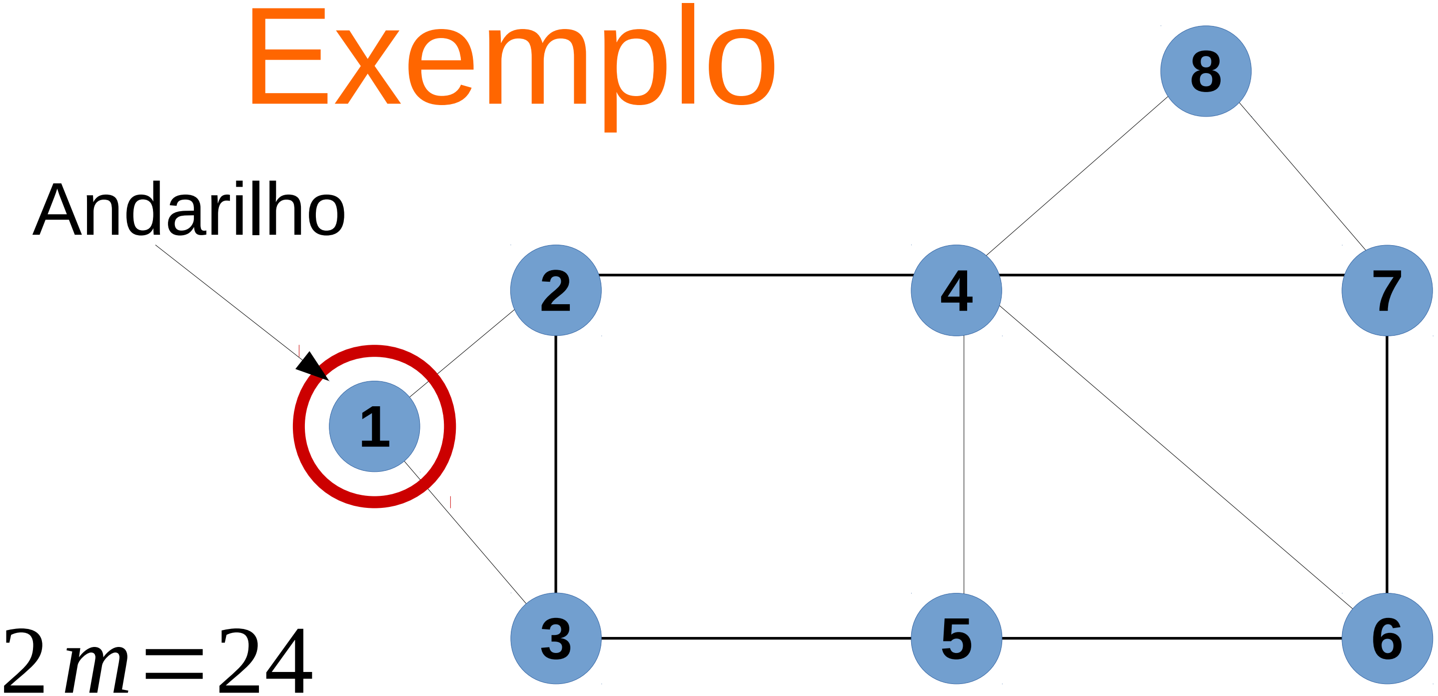
- **Incrível:** só depende do grau do vértice *i*
  - *K* é constante de normalização
  - Todos os vértices com mesmo grau em igual prob
- Além disso, esta CM é reversível

$$\pi_i P_{ij} = \pi_j P_{ji}$$

Podemos verificar

  - tanto faz andarilho andar para frente ou para trás
  - equilíbrio mais forte para esta CM

Exemplo



$$K=\sum_i d_i = 2m = 24$$

$$\pi = \left(\frac{2}{24}\ \frac{3}{24}\ \frac{3}{24}\ \frac{5}{24}\ \frac{3}{24}\ \frac{3}{24}\ \frac{3}{24}\ \frac{2}{24}\right)$$

- Independente de onde andarilho inicia, distribuição de sua posição converge para π
  - prob de encontrar o andarilho no vértice *i*

Figueiredo 2018