Redes Complexas
Aula 9

Aula passada

- Distribuição de Pareto
- Medindo lei de potência
- Estimando parâmetros
- Exemplos reais

Aula de hoje

- Modelos de redes
- Grafos aleatórios
- Modelo G(n, p)
- Propriedades

Estudando Redes Reais

- Como estudar as características e funcionalidades de uma rede?
  - ex. Internet
- Como generalizar estas observações?

Modelo matemático

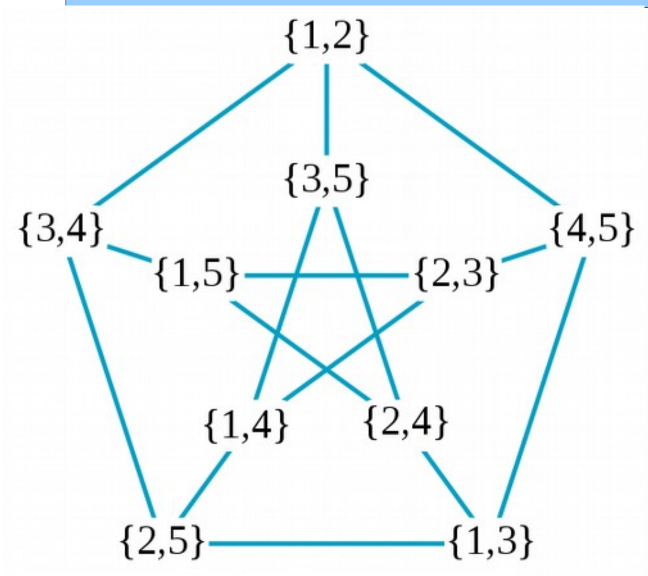
- Abstração matemática da realidade
  - além do estudo empírico
- Generalização das redes reais

Modelo matemático para redes

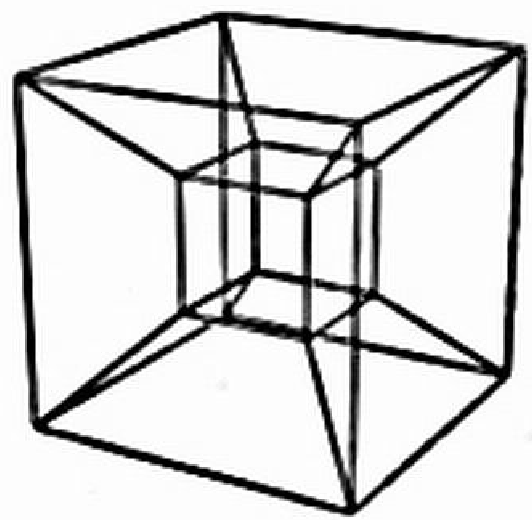
Modelos Determinísticos para Redes

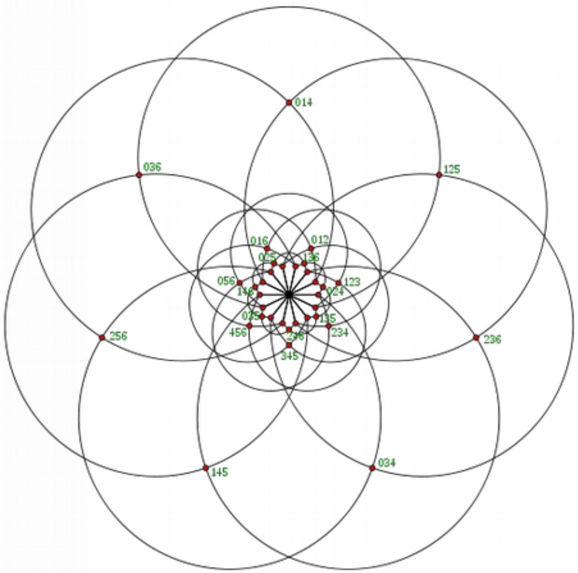
- Estrutura topológica é determinística
  - seguem alguma regra de formação

Exemplos de modelos?



Grafo Kneser

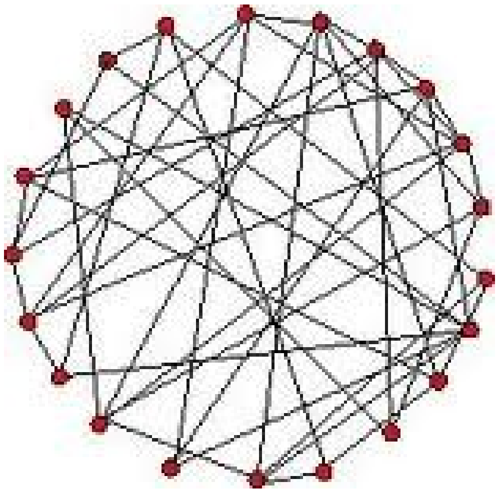

Hipercubo


Grafos ímpares

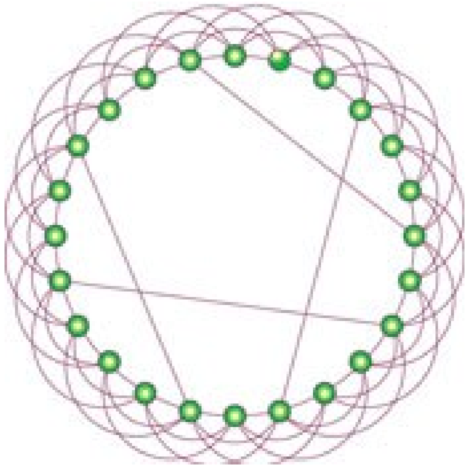
Modelos Probabilísticos para Redes

- Estrutura topológica é aleatória
  - seguem regras de formação com aleatoriedade

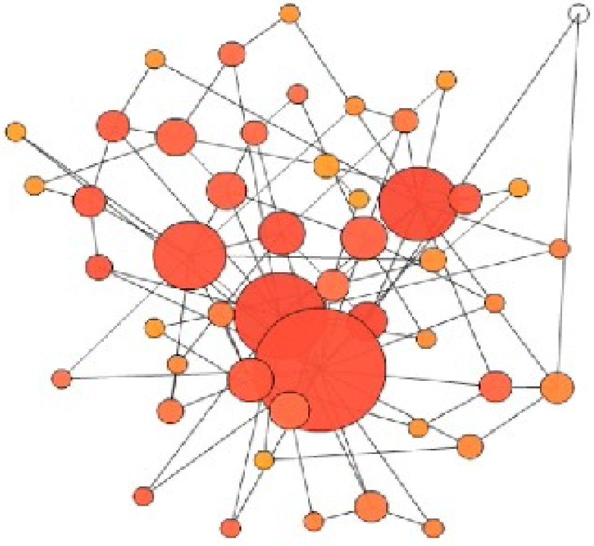
Exemplos de modelos?



Erdös-Réyni



Watts-Strogatz



Barabási-Albert

Modelo G(n,p)

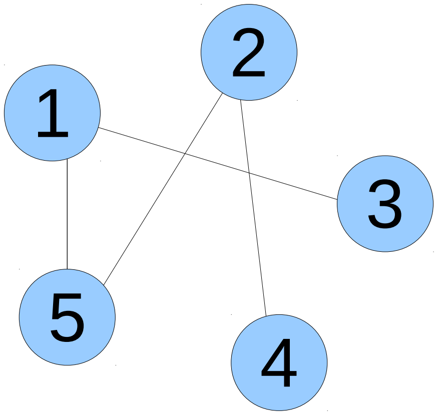
- Modelo clássico para grafos aletórios
  - introduzido por Erdös e Rényi na década de 50
  - aka. modelo binomial, modelo de Erdös-Rényi

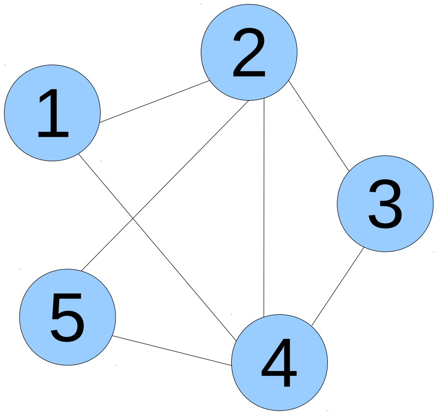
Como funciona o modelo?

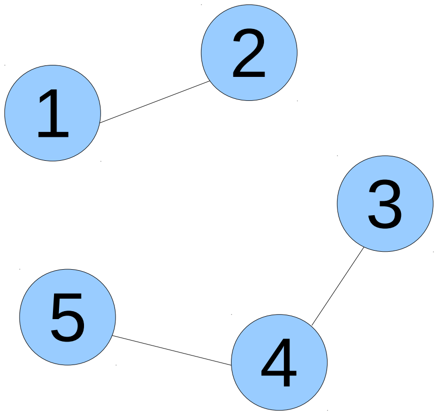
- Grafo possui n vértices rotulados
- Cada possível aresta do grafo existe com probabilidade p independentemente
  - grafo não-direcionado, sem loops

Modelo G(n,p)

- Modelo possui dois parâmetros (determinísticos)
  - n: número de vértices
  - p: prob. de existência de cada aresta
- Dado os dois parâmetros, grafo gerado é único?
  - Ex. n=5, p=0.25
- Não! Grafo é aleatório, será amostrado







Estudo do G(n,p)

- Estudar a **estrutura** dos grafos gerados pelo modelo G(n,p)
  - em função de n e p (seus únicos parâmetros)
- Estrutura é aleatória
  - depende da realização
- Mas podemos caracterizar suas propriedades topológicas
  - probabilisticamente!

Propriedades Simples

- Espaço amostral do modelo G(n,p)?
  - Quantos grafos diferentes?

$$|S| = 2^{\binom{n}{2}}$$

Cada aresta pode ou não estar presente

- Probabilidade do modelo gerar um grafo G específico com n vértices?
  - Gerar um conjunto de arestas E = $\{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$

$$P(gerar\, conjunto\, E) = p^{|E|}(1-p)^{\binom{n}{2}-|E|}$$

- Depende apenas de |E|
- Todos grafos são equiprováveis quando p = 1/2

Arestas do G(n,p)

- Quantas arestas tem um grafo do modelo G(n,p)?
- Variável aleatória, M. Distribuição de M?

$$P(M=m)=\binom{\binom{n}{2}}{m} p^m (1-p)^{\binom{n}{2}-m}$$

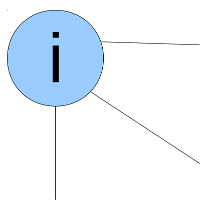
Distribuição binomial

- Valor esperado de M?

$$E[M]=\binom{n}{2} p=\frac{n(n-1)p}{2}$$

Grau do G(n,p)

- Qual é o grau de um vértice qualquer do modelo?
- Variável aleatória D. Distribuição de D?



$$P[D=k]?$$ k = 0, 1, ..., n-1

- Cada aresta incide sobre vértice i com prob p

$$P[D=k]=\binom{n-1}{k}p^k(1-p)^{n-1-k}$$

Distribuição binomial

- Valor esperado do grau?

$$E[D]=(n-1)p$$

Grau do G(n,p)

- Aproximação do grau para n grande
- Para onde vai a Binomial quando n é grande?

$$p_k = P[D=k] = \binom{n-1}{k} p^k (1-p)^{n-1-k}$$

...

$$p_k \approx \frac{E[D]^k}{k!} e^{-E[D]}$$

Para n grande e k << n

- Distribuição de Poisson com valor esperado E[D]

Coeficiente de Clusterização

- De um vértice qualquer (escolhido ao acaso)
- Variável aleatória, K. Distribuição? Valor esperado?
- Distribuição condicional, no grau do vértice

$$P\left[K=\frac{k}{\binom{d}{2}} \middle| D=d\right]$$

Prob. de termos k arestas
entre os d vizinhos do vértice

- Valor esperado

$$E[K]=p$$

Não depende do grau

Propriedades Topológicas

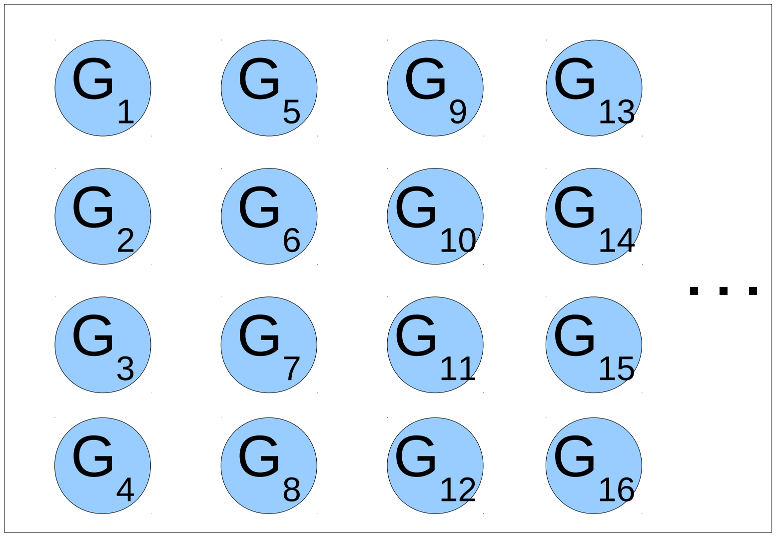
- Seja propriedade X
  - ex. X = “grafo é conexo”
- Seja G um grafo decorrente da realização do processo aleatório
  - G é uma amostra do modelo aleatório

G possui propriedade X?

Sim ou não! Depende da amostra

Exemplo

Espaço amostral =
todos possíveis grafos que podem ser gerados



- Seja X uma propriedade estrutural
  - ex. ser conexo
- Alguns grafos do espaço amostral possuem propriedade X

- Modelo G “possui” X
  - probabilidade de G gerar uma amostra que possui propriedade X

Propriedades Topológicas

- Seja p_G a probabilidade do modelo gerar o grafo G
  - grafo G é uma amostra
- Seja C o conjunto de grafos (determinísticos) que possuem propriedade X
- Então temos

$$P[G\ possuir\ X] = \sum_{G' \in C} p_{G'}$$

- Probabilidade pode depender de *n*
  - número de vértices do grafo
- Interesse na probabilidade assintótica
  - quando *n* é muito grande

Propriedade de *Quase Todos os Grafos*

- Seja G um modelo aleatório para grafos e X uma propriedade topológica
- Se

$$P[G\ possuir\ X] \rightarrow 1 \quad \text{quando} \quad n \rightarrow \infty$$

- Então dizemos que quase todos os grafos de G possuem X
  - X ocorre em G a.a.s. (*asymptotically almost surely*)

Propriedades Topológicas

- Estudar a **estrutura** do modelo G(n,p)
  - em função de n e p (únicos parâmetros)
- Caracterizar estrutura para *n* muito grande
  - estrutura quando *n* tende para infinito
  - evitar efeitos de borda

$$P[G\ possuir\ X] \rightarrow ? \quad \text{quando} \quad n \rightarrow \infty$$

- onde X é uma propriedade topológica de G
  - ex. X = "ser conexo"

Estrutura também depende de p

Comportamento de p

- Caracterizar G(n,p) quando n tende a infinito. Mas p?

Como p varia quando $n \longrightarrow \infty$

- Duas alternativas
  - p é fixo, não varia
  - p é uma função de n, varia com n
- Influência fundamental na estrutura
  - estrutura depende de p

G(n,p) com p fixo

- Considere p > 0 fixo (constante)
- Grau esperado dos vértices?
  - quando n tende a infinito?
- Número de arestas esperado no grafo?
  - quando n tende a infinito?

Grafo muito denso

- **Intuitivamente**: Grafo conexo, vértices muito próximos

G(n,p) com p fixo

- Para p constante > 0, G(n,p) é conexo a.a.s.

- Como provar este resultado?
- **Idéia:** mostrar que a probabilidade de ser desconexo vai a zero
- Condicionar no tamanho da partição s, n-s
- Usar Union-Bound para descondicionar
- Mostrar que probabilidade vai a zero

G(n,p), p fixo tem diâmetro 2

- Para p constante > 0, G(n,p) é conexo e possui diâmetro 2 a.a.s.

- Diâmetro 2: maior distância entre qualquer dois vértices é 2
- Como provar este resultado?
- **Idéia**: mostrar que o número de vértices que não possuem vizinhos em comum vai a zero

G(n,p) com p(n)

- p(n) é uma função de n
  - caso anterior p(n) = cte

Qual p(n)?

- p(n) deve **diminuir** com n
- Exemplos

$$p(n)=\frac{c}{n} \qquad p(n)=n^{-2.5} \qquad p(n)=\frac{c\log n}{n}$$

O que ocorre nestes casos?