

Redes Complexas

Aula 10

Aula passada

- Preferential Attachment
- Modelo BA
- Lei de potência

Aula de hoje

- Experimento de Milgram
- Modelo “Small World”
- Propriedades estruturais

Mundo Pequeno

- Seria o mundo um vilarejo?
 - início do século XX
 - redes sociais (reais) como objeto de estudo
- **Experimento de Milgram**: “comprovar” que o mundo era pequeno
 - caminho entre duas pessoas quaisquer pela rede social (real) deve ser curto
- Realizadas por Milgram na década de 60
 - professor de Harvard, psicólogo social influente
 - cunhou o termo “small world”

Experimentos de Milgram

- Enviar uma carta para uma pessoa em Boston
 - nome e formação fornecida
- Carta deve ser enviada a alguém que você conhece pessoalmente
 - e repassada até chegar ao destino
 - postal enviado a Milgram a cada passo (rota das cartas)
- Sujeitos (origem): pessoas em Omaha e Kansas (interior dos EUA)
 - centenas de sujeitos, escolhidos aleatoriamente
 - grande distância física e social



Resultados

- Maioria das cartas nunca chegaram ao destino
 - pessoas não passavam carta adiante
- Das que chegaram ao destino
 - média do comprimento do caminho: 5.5
- Surpreendente!
 - População 10^8 , dois indivíduos aleatórios estão próximos na rede social

Seis graus de separação!

- Experimento ajudou a popularizar esta noção
 - termo não foi usado por Milgram

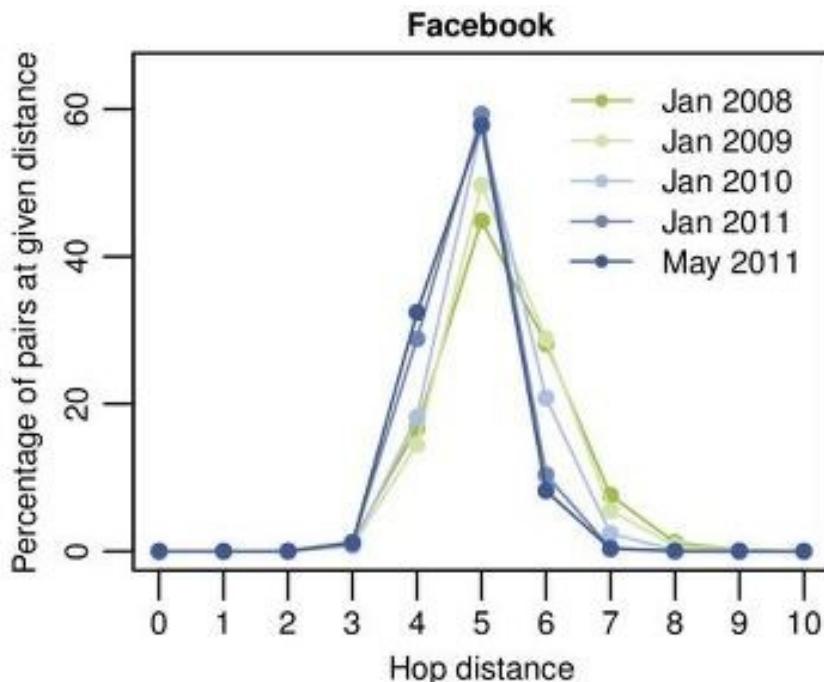
Small World Hoje

- Small World Project (2003), Columbia Univ.
 - versão moderna do experimento: *email ao invés de carta*
 - escala global (milhares de pessoas, em vários países, 18 alvos diferentes)
- Resultados similares
 - maioria das correntes não chegam ao destino
 - média do caminho entre 5 e 7

Peter S. Dodds, Roby Muhamad, Duncan J. Watts,
"An Experimental Study of Search in Global Social Networks", Science (2003)

Small World Hoje

- **Facebook anatomy:** Cuidado, experimento é diferente!
 - menor caminho possível na rede do Facebook, diferente do caminho que pessoas encontram



- $n=721 \text{ Mi}$, $m=68.7 \text{ Bi}$
- $p=0.00000026$ (muito esparso)

- Distância média é menor (4.7)
- Distâncias ***diminuem*** com o crescimento da rede!
- Tecnologia reduzindo caminhos na rede social?

Modelo Small World

- Inspirado nos resultados de Milgram
 - e alta clusterização observada empiricamente
- Proposto por Watts and Strogatz (Cornell, Matemática Aplicada)
 - *“Collective dynamics of 'small-world' networks”*
Nature, 1998 – 34000 citações (Google Scholar)
 - 30 anos depois de Milgram!
- Modelo captura as duas propriedades
- Mostra que ambas podem coexistir em um mesmo grafo esparsa

Clusterização e Distâncias

- Considere um grafo esparso
 - número de arestas relativamente baixo
- Considere alta clusterização e caminhos curtos

Propriedades Antagônicas?

- **Alta clusterização:** muitos triângulos, arestas “desperdiçadas”, caminhos não avançam
- **Caminhos curtos:** arestas usadas eficientemente, avanço mais rápido

Modelo Small World

- Começar com um látice regular
 - N vértices organizados em um círculo
 - arestas para vizinhos a distância k ou menor
- Para cada aresta, reposicionar suas extremidades com probabilidade p
 - nova extremidade escolhida de maneira uniforme entre os vértices

Modelos Small World

- Modelo possui 3 parâmetros
 - N, k, p
- k controla grau e clusterização
- p controla aleatoriedade do grafo
 - $p = 0$, grafo látice regular
 - $p = 1$, grafo aleatório (idêntico ao $G(n, p)$?)
- Propriedades topológicas do grafo
 - distância média
 - clusterização
 - distribuição dos graus, etc

Propriedades Estruturais

- Considere n grande, k constante, com $n \gg k$
- $C(p)$: clusterização em função de p
 - $C(0)$, alta clusterização (intuitivamente)
 - $C(1)$, baixa clusterização
- $I(p)$: distância média em função de p
 - $I(0)$, distância média alta (intuitivamente)
 - $I(1)$, distância média baixa

O que ocorre quando p é intermediário?

Calculando C(0)

- Clusterização

- fração de aresta entre vizinhos:

- Média dos vértices

- C(0) = ?

- Não depende de n, pois é igual para todo n

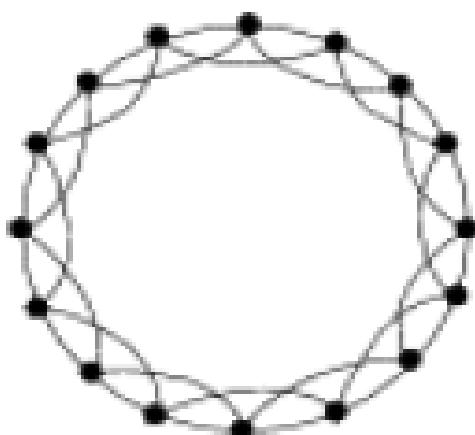
- mas depende de K

- Ex. K = 2

- Para K genérico?

$$C(0) = \frac{3(K-1)}{2(2K-1)} \sim \frac{3}{4}$$

constante!



$$C(0) = 1/2$$

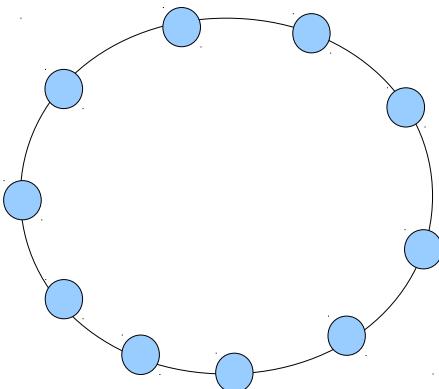
$$C_i = \frac{E_i}{\binom{d_i}{2}}$$

de vizinhos de i

Grau do vértice i

Calculando $l(0)$

- Distância média entre vértices
 - Entre todos os pares de vértices
- $l(0) = ?$
- Depende de n e de K
- Ex. N ímpar, $K = 1$



$$l(0) = \frac{1+2+3+\dots+n/2}{n/2} = \frac{n}{4} + \frac{1}{2}$$

- Para K genérico?

$$l(0) \sim \frac{n}{4K}$$

Crescimento linear com n

Calculando C(1) e l(1)

- Com $p=1$, grafo é totalmente aleatório
- Modelo $G(n, m)$, onde m é o número fixo de arestas
 - Ponta das arestas escolhidas aleatoriamente entre todos os vértices
 - Primo do $G(n, p)$
 - Propriedades estruturais equivalentes
- No $G(n, p)$: clusterização e distância média?

$$C = p \quad l \sim \frac{\log(n)}{\log(d)}$$

Calculando $C(1)$ e $l(1)$

- Modelo SW, com $p = 1$
- Dado K , grau médio é $2K$
- Dado N e K , $m = NK$
- Fração de arestas: $p = \frac{2K}{N-1} \sim \frac{2K}{N}$
- Logo

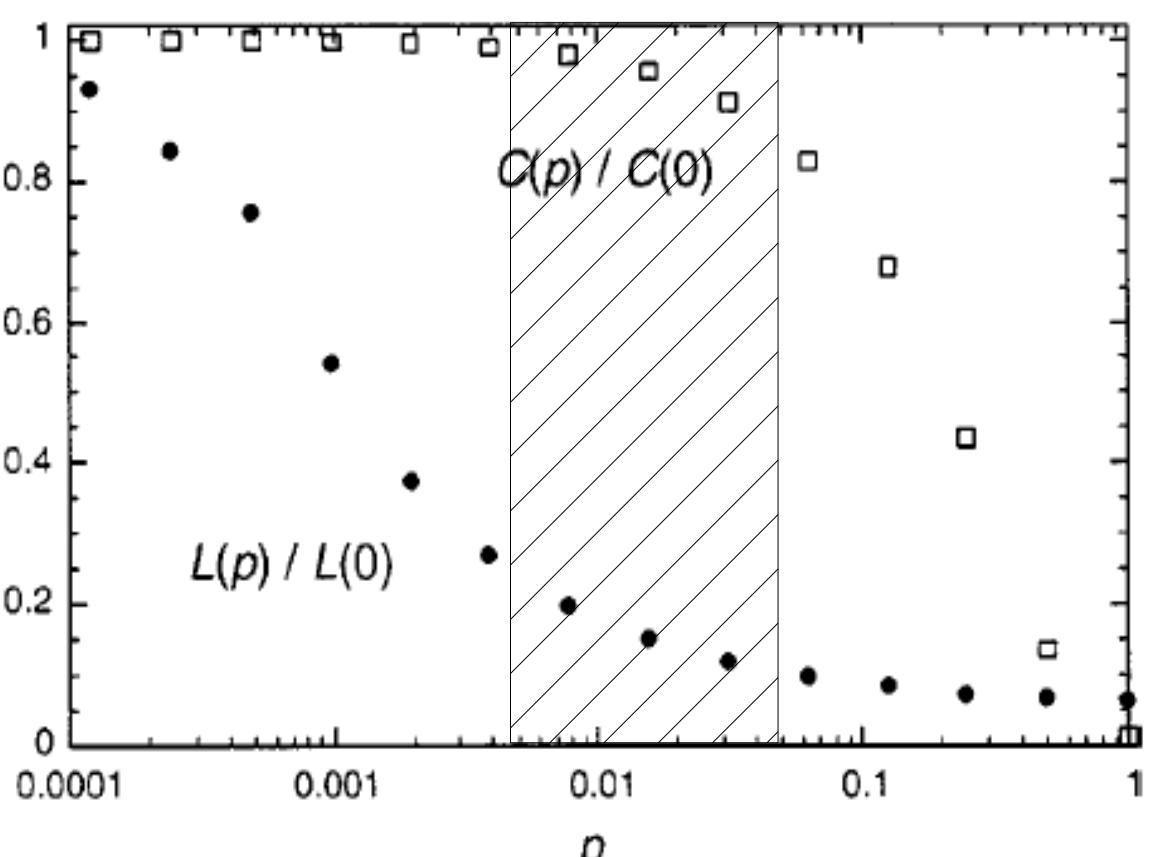
$$C(1) = \frac{2K}{N}$$

decresce
linearmente com N

$$l(1) = \frac{\log(N)}{\log(2K)}$$

Crescimento
logarítmico com N

Análise Numérica

- Relação entre $C(p)/C(0)$ e $I(p)/I(0)$
 - $C(0)$ maior clusterização, $I(0)$ maior distância média
- 
- Distância média decresce rapidamente
 - Clusterização decresce mais devagar
 - Alta clusterização, distâncias curtas é possível!
 - Small World Networks

Distância nos Extremos

- $p = 0$

$$l(0) \sim \frac{N}{2K}$$

Distância cresce linearmente com N

- $p = 1$

$$l(1) = \frac{\log(N)}{\log(2K)}$$

Distância cresce logaritmicamente com N

- Mudança fundamental de comportamento

Onde ocorre transição?

Análise da Distância

- Distância decresce rapidamente em p
- Intuição: poucas arestas aleatórias são suficientes para significativamente diminuir distâncias
 - arestas criam atalhos
- Número médio de atalhos?
- $a = p K N$
- Transição de fase em a

$$l(N, K, p) \sim N/K \quad \text{quando } a \ll 1$$

$$l(N, K, p) \sim \log(p K N) / (p K^2) \quad \text{quando } a \gg 1$$

Críticas ao Modelo SW

- Modelo não é inspirado em nenhum processo de formação de redes
 - nem é muito interessante do ponto de vista teórico
 - variação do modelo possui melhor tratabilidade
- Distribuição de grau não possui cauda pesada
 - Baixa variância, próximo binomial
- Modelo não generativo e sem crescimento