Redes Complexas
Aula 15

Aula passada

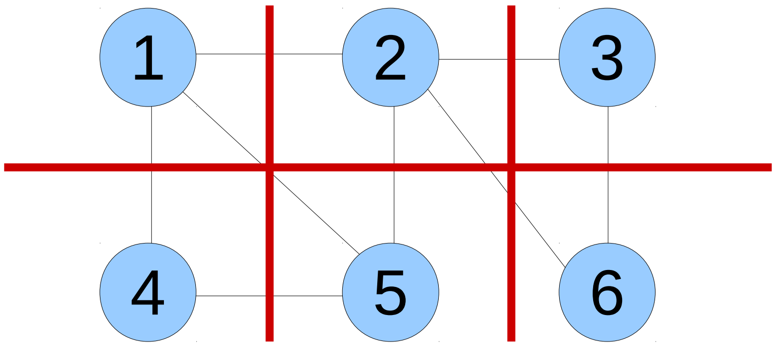
- Resilience ("robustez")
- Tipo de falhas
- Influência da estrutura
- Análise do ponto crítico

Aula de hoje

- Partição e bisseção em grafos
- Modularidade
- Algoritmos de Newman e Louvain
- Limitações

Partição de Grafos

- **Problema:** Dividir um grafo em partes
  - partição do conjunto de vértices



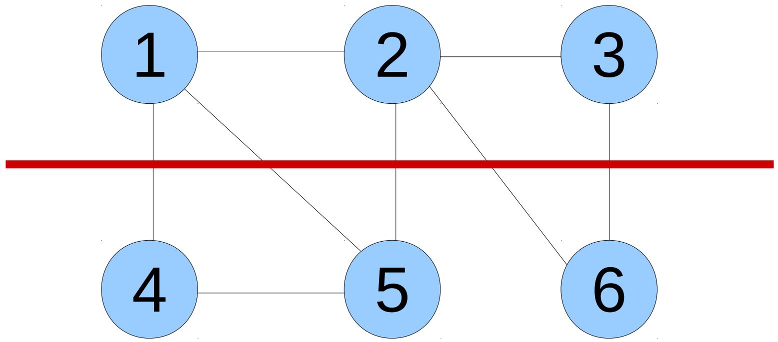
- Problema antigo, difícil e com muitas aplicações!
- Qual partição ao lado é melhor?

Como definir uma boa partição?

- Não há bala de prata, depende da aplicação

Corte em Grafos

- **corte:** induz uma partição com duas partes
  - subconjuntos A e B de vértices

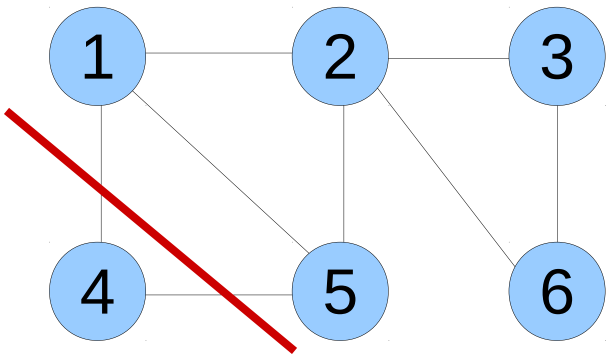


- A={1,2,3} , B={4,5,6}

- c(A,B) = custo do corte (A,B) = número de arestas entre vértices de A e B
  - soma dos pesos das arestas, em caso com peso
  - ex. c(A,B) = 5

Corte em Grafos

- **Problema:** encontrar o corte de custo mínimo de um grafo qualquer
  - problema clássico da computação, temos algoritmo polinomial

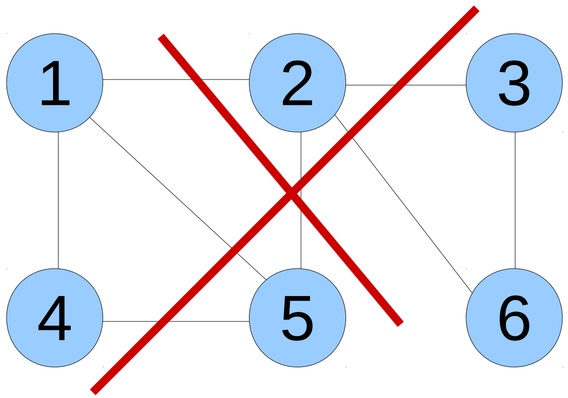


- A={1,2,3,5,6} , B={4}
- c(A,B) = 2

- Problema: tamanho das duas partições encontradas não é considerado
  - em muitos aplicações, isto é importante

Bisseção em Grafos

- **bisseção:** corte com duas partições do mesmo tamanho (ou 1 de diferença)
  - restrição na definição de corte

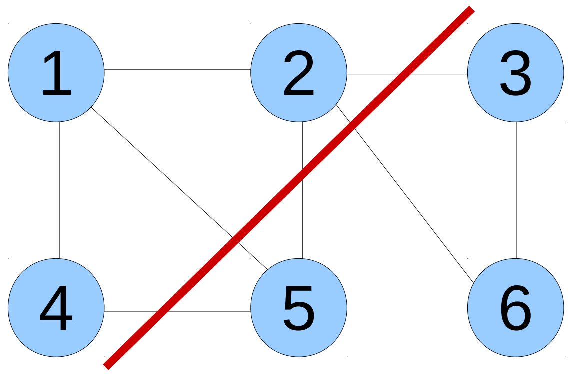


- A={1,2,4} , B={3,5,6}
- c(A,B) = 5

- **Problema:** encontrar a bisseção de custo mínimo em um grafo qualquer
  - ex. A={1,4,5}, B={2,3,6}, c(A,B) = 2

Bisseção em Grafos

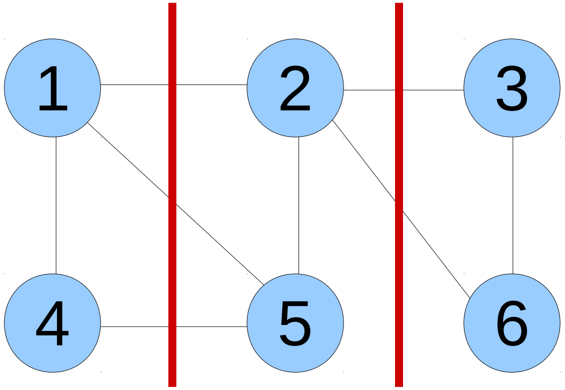
- Problema de bisseção é NP-Completo (não temos algoritmo polinomial)
  - exceções para classes de grafos, ex. árvores
- Algoritmo de Kernighan–Lin (1970)
  - algoritmo guloso (heurística) que troca pares de vértices até não melhorar mais
  - a cada passo, escolhe par que ao trocar de lado mais reduz custo do corte



- A={1,2,4}, B={3,5,6}, c(A,B)=5
- Trocar 2 e 5
- A={1,4,5}, B={2,3,6}, c(A,B)=2

Partição Balanceada em Grafos

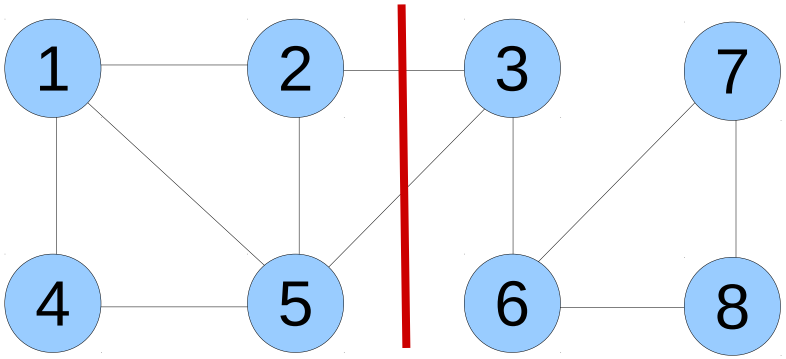
- Generalização da bisseção em grafos
- k partes de tamanho igual (ou 1 de diferença)
  - V_1, V_2, ..., V_k, interseção é vazia, união é V
- Custo da partição é o custo somado para todos os pares (V_i, V_j)



- k=3, $V_1=\{1,4\}$, $V_2=\{2,5\}$, $V_3=\{3,6\}$
- Custo = $c(V_1,V_2)+c(V_1,V_3)+c(V_2,V_3)$ = = 3 + 0 + 2 = 5

Partição Balanceada em Grafos

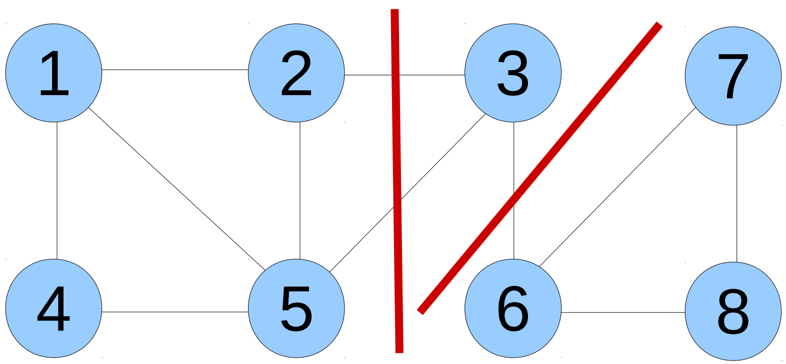
- **Problema 1**: número de partições tem que ser especificado
- **Problema 2:** tamanho das partições tem que ser igual (ou diferir em um)
- **Problema 3**: estrutura interna das partições não é considerado
  - podem não ser conexas, e ter baixa densidade



- Em muitas aplicações, isto é importante
- *Network Science* x Teoria dos grafos!

Medindo Qualidade de Partição

- Como melhor aferir a qualidade de uma partição?
- **Ideia:** usar tamanho das partições para determinar "potencial" de arestas
  - normalização, se assim preferir
- Ratio-Cut(A,B) = c(A,B) / |A||B|
  - onde |A| é o número de vértices em A



- rc(A,B) = 2 / (4*4) = 1/8
- rc(A,B) = 1 / (5*3) = 1/15

Partição com Ratio Cut

- **Problema:** encontrar partição (duas partes) que minimiza ratio cut
  - problema é NP-Completo
  - algoritmo aproximativo de Arora, Rao & Vazirani (2009), com fator O(sqrt(log n))
- Ratio cut tem conexões com decomposição spectral do Laplaciano do grafo
  - método para encontrar corte, limitante do ratio cut mínimo
- Ratio Cut ainda não resolve problemas
  - número de partições
  - estrutura interna das partições

Modularidade

- **Outra ideia**: considerar modelo aleatório para criação de arestas, aferir arestas internas
- Modularidade: fração de arestas dentro de cada parte menos o numero médio de arestas dentro de cada parte no modelo aleatório
- K partes, n vértices, m arestas

prob. de i e j serem vizinhos

$$M=\frac{1}{2m}\sum_k \sum_{i,j\in V_k}(A_{ij}-p_{ij})$$

constante de normalização

- Assumindo *configuration model*, com graus dos vértices da rede

$$M=\frac{1}{2m}\sum_k \sum_{i,j\in V_k}\left(A_{ij}-\frac{d_i d_j}{2m}\right)$$

Modularidade

- Simplificando, temos

$$M=\sum_k \left(\frac{m_k}{m}-\left(\frac{d_k}{2m}\right)^2\right)$$

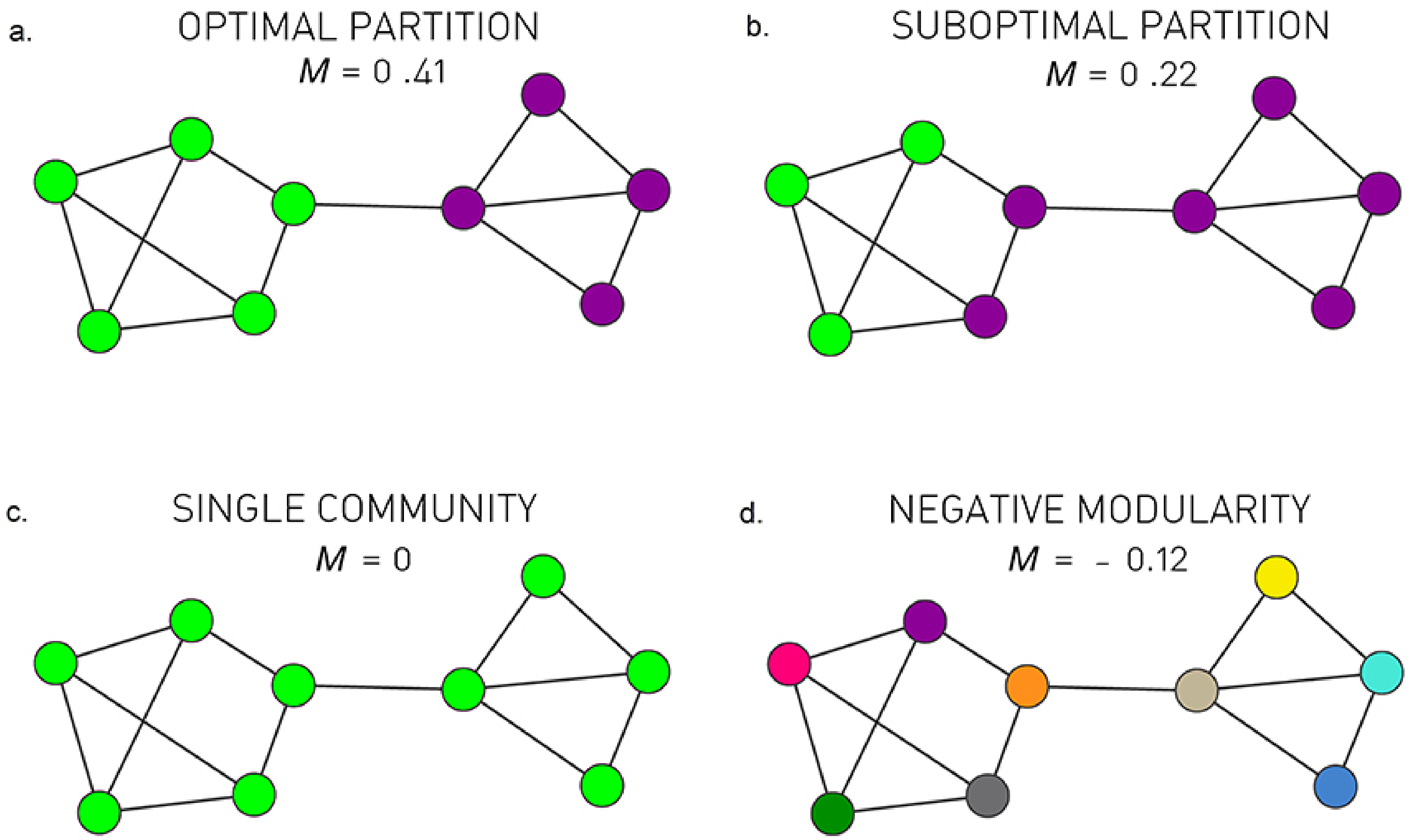
- onde m_k é o número de arestas dentro da parte k, d_k é a soma dos graus dos vértices da parte k

Propriedades

- M = 0 se k=1: a rede inteira define um *baseline*
- M < 0 se k=n: muitas partições é ruim
- max M <= 1: valor máximo da modularidade é 1
- Quanto maior, melhor!

Partição é chamado de comunidade em *network science*

Exemplo de Modularidade



Figueiredo – 2018

Calculando Modularidade

- **Problema:** determinar partição que maximiza modularidade em um grafo
  - não se conhece algoritmo eficiente
- Algoritmo guloso (heurística) de Newman

  1) Cada vértice em sua partição

  2) Determinar ganho de modularidade ao juntar um par de partições (para todos os pares)

  3) Fundir partição que possui maior ganho

  4) Voltar ao passo 2 até ter uma única partição

  5) Retornar partição de maior modularidade (guardar partição e modularidade a cada passo)
- Complexidade: O((n+m)n)

Algoritmo de Louvain

- Proposto por pesquisadores de Univ Catol de Louvain, Bélgica (Blondel et al.)
  - um guloso (heurística) ainda mais rápido

  1) Cada vértice em sua partição

  2) Determinar ganho de modularidade ao mover cada vértice para partição de um de seus vizinhos

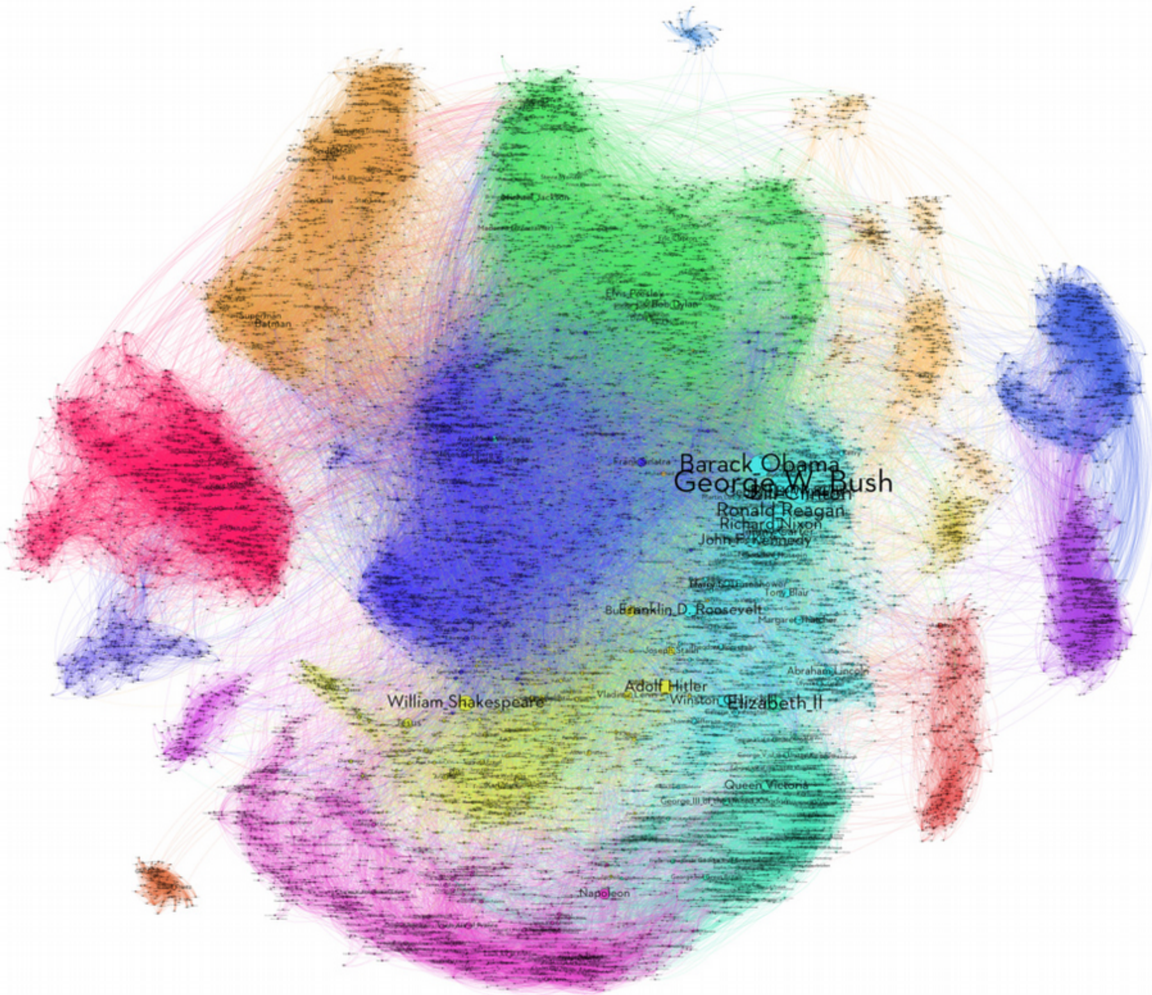
  3) Mover vértices para partição de maior ganho (se houver ganho)

  4) Construir nova rede onde cada partição é um vértice

  5) Voltar ao passo 2 até não conseguir melhorar
- Complexidade: O(m)

Algoritmo de Louvain

- Funciona em redes com 100 milhões de vértices (bilhões de arestas)
- Algoritmo pode ser paralelizado



- Comunidades de uma rede social

Limitações de Modularidade

- Métrica é enviesada para partições maiores
  - partições pequenas reduzem modularidade, quando rede cresce: *resolution limit*
- Diferença de modularidade ao juntar A e B

$$\delta M_{AB} = \frac{m_{AB}}{m} - \frac{d_A d_B}{2m^2}$$

- onde m_{AB} é o número de arestas entre A e B, d_A é a soma dos graus dos vértices da partição A

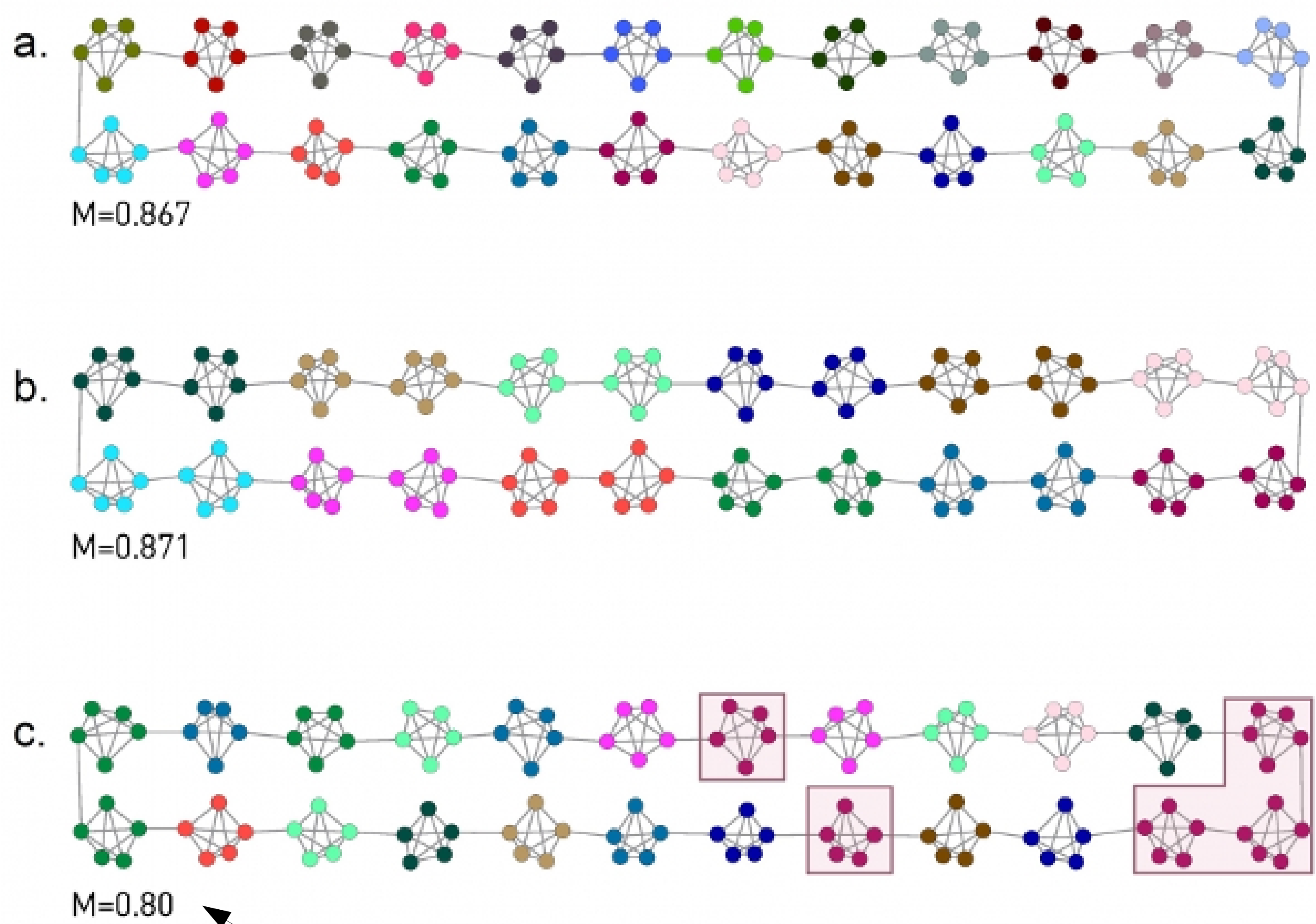
- Se d_A, d_B grande o suficiente, basta $m_{AB} = 1$ para juntar as duas partições!

$$d_A \geq \sqrt{2m}$$

- Condição (aproximada) para tamanho mínimo de cada partição para maximizar modularidade da rede

Limitações de Modularidade

- Anel com 24 cliques de tamanho 5



- Partição intuitiva (cada clique uma partição)
- Modularidade máxima (duas cliques por partição)
- Partição aleatória (cliques em partições)

Valor relativamente alto!

Figueiredo – 2018

Partição com Sobreposição

- Vértices frequentemente pertencem a diferentes comunidades (partições)
  - redes sociais: família, trabalho, escola, hobby
  - redes de informação: conteúdo
- Partição com sobreposição
  - vértice pode estar em mais de uma partição (comunidade)
- Algortimos
  - CFinder: baseado em percolação de cliques
  - Link Clustering: baseado em similaridade arestas

Nada definitivo. Tema de pesquisa!