

Redes Complexas

Aula 3

Aula passada

- Caracterizando redes grandes
- Grau
- Distâncias
- Clusterização
- Características de redes reais

Aula de hoje

- Centralidade de vértices
- *Betweeness, Closeness*
- Centralidade de Autovetor, Katz, PageRank

Centralidade



Como medir a *importância* de um vértice?

- Utilizando apenas a estrutura
- Relativo a outros vértices
 - Métricas locais
 - dependem apenas da vizinhança do vértice
(Ex. grau, random walk)
 - Métrica globais
 - Dependem do grafo inteiro
(Ex. Closeness, pagerank)
- Grau
- Betweeness
- Closeness
- Autovetor
- Random walks
- etc.

Centralidade



**Qual é a melhor métrica
de importância?**

- Como determinar a qualidade de um ranqueamento?

Impossível sem referência externa!

- Referência externa para avaliar ranqueamento
 - empírica ou processual
- Referência depende do contexto e do objetivo do ranqueamento

Não existe a melhor métrica!

Centralidade de Grau

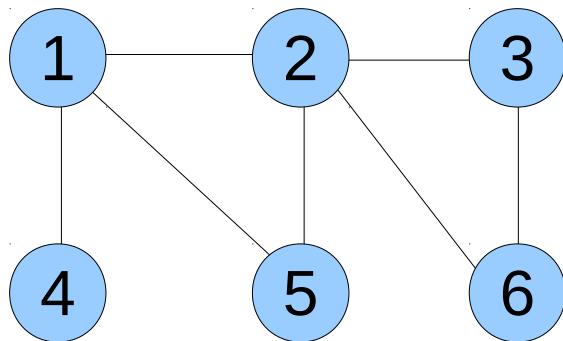
- Grau do vértice ou grau do vértice normalizado
 - valor entre 0 e 1

$$C_v = \frac{d_v}{n-1}$$

- Grafo direcionado, grau de entrada/saída
 - duas centralidades em grau por vértice

Centralidade de Betweenness

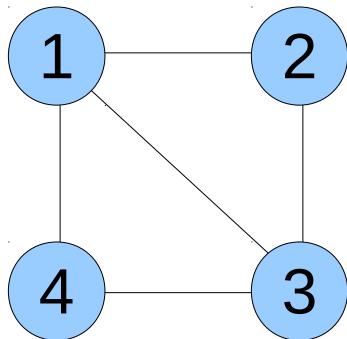
- Mede o quanto no “meio do caminho” um vértice está
- Considerar todos os caminhos mínimos do grafo
- Número de caminhos mínimos que passam pelo vértice
- Exemplo



- Grafo completo, K_n ?
- Grafo estrela, com n folhas?

Centralidade de Betweenness

- **Problema:** Como definir métrica quando mais de um caminho mínimo existe entre um par origem/destino?
 - empate no custo do caminho mínimo
- Exemplo



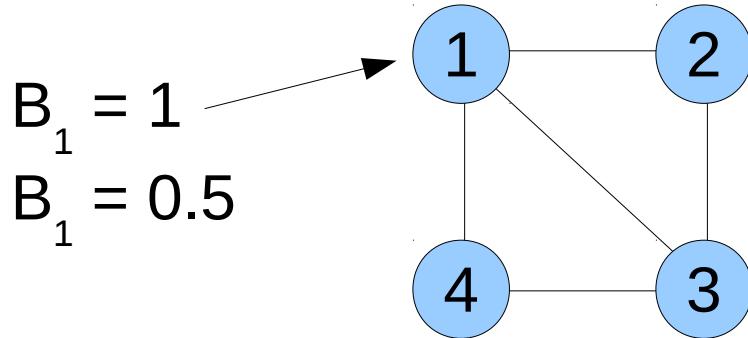
- Caminho mínimo entre 2 e 4?
- 2,1,4 ou 2,3,4?
- Centralidade do vértice 1 e 3?

Centralidade de Betweenness

- Duas abordagens

- Cada caminho mínimo conta 1 vez
 - “Carga” dividida pelos caminhos mínimos (cada caminho mínimo conta $1/k$ para a métrica, para k caminhos)

- Exemplo



- Para muitas redes, diferença é pequena
 - Mas nem sempre!

Calculando Betweeness

- Mais precisamente

$$C_v = \sum_{s, t \in V; s, t \neq v} \frac{\sigma_v(s, t)}{\sigma(s, t)}$$

Número de caminhos
mais curtos entre s e t
que passam por v

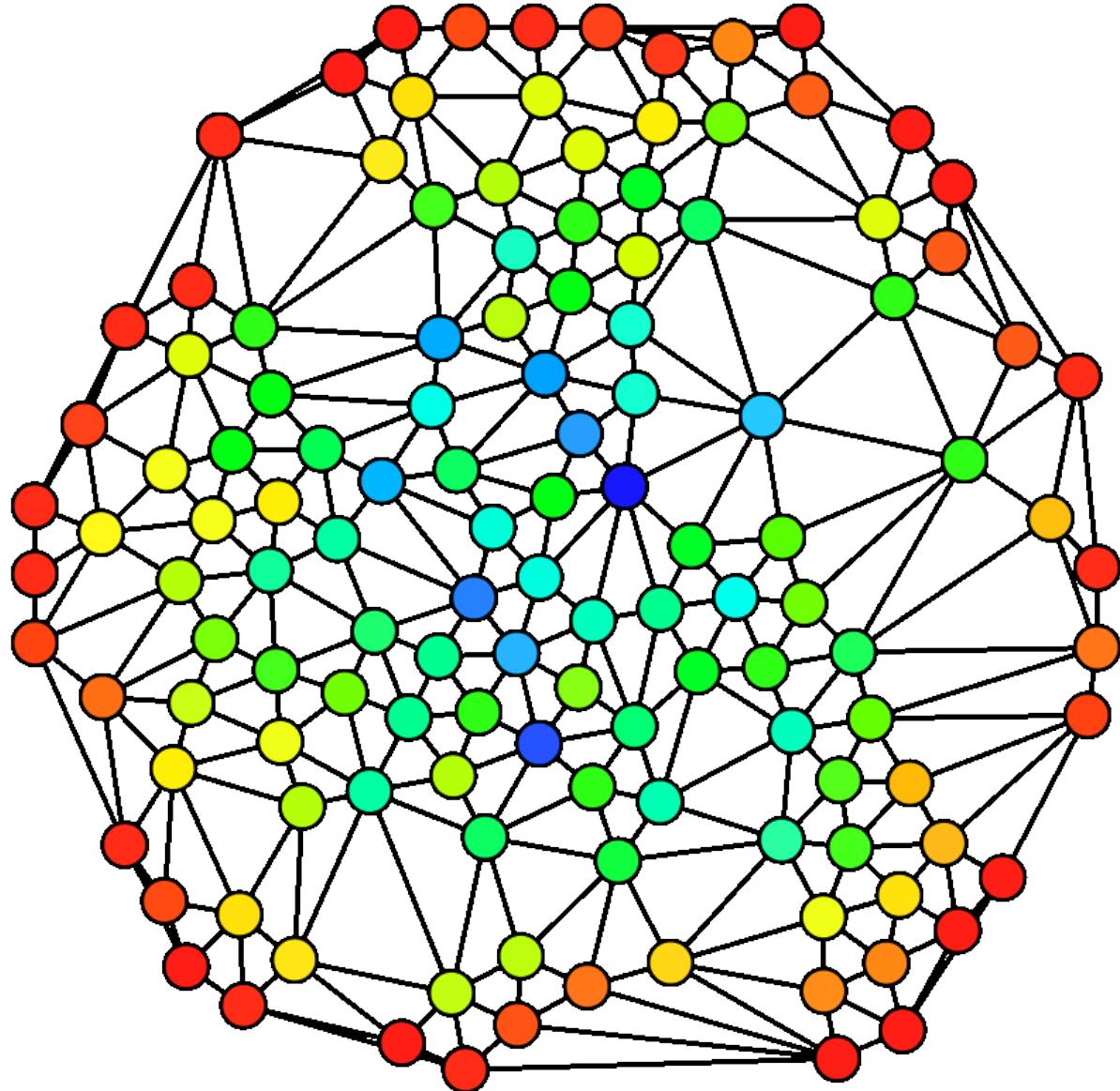
- ou

$$C_v = \sum_{s, t \in V} \sigma_v(s, t)$$

Número de caminhos
mais curtos entre s e t

- Pode ser normalizada pelo número total de pares origem/destino (sem contar v)
 - métrica entre 0 e 1

Exemplo



- Cores indicam betweeness
- Vermelho = 0, azul = máximo
- Ilustra vértices mais centrais

Centralidade de Closeness

- Utiliza conceito de distância
 - com ou sem pesos
- Distância média entre vértice e o resto do grafo
 - capturar o quanto central é o vértice

$$C_v = \frac{\sum_{t \in V - \{v\}} d(v, t)}{n - 1}$$

- “Velocidade” com a qual informação se propaga de um vértice para o resto da rede

Centralidade de Closeness

- Maior distância a qualquer outro vértice do grafo
 - excentricidade (*eccentricity*) do vértice

$$C_v = \max_{t \in V - \{v\}} d(v, t)$$

Centralidade

- **Ideia:** importância do vértice depende da importância dos vizinhos
 - Recursão *to the rescue!*

Como formalizar ideia?

- Seja x_i a importância do vértice i

$$x_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j$$

Somatório da importância
dos vizinhos de i
 a_{ij} : matriz de adjacência

Como calcular x_i ?

Centralidade de Autovetor

- Processo iterativo
- Iniciar com $x(0) = (x_1(0), \dots, x_n(0))$
- Forma matricial: $x(1) = Ax(0)$
- Depois de t iterações:

$$x(t) = A^t x(0)$$

Processo converge!
(normalizar x depois de cada passo)

$$Ax = \kappa_1 x \quad \longleftarrow \quad x \text{ é o autovetor associado ao autovalor } k_1 \text{ (maior autovalor)}$$

Redes Direcionadas

Como definir importância?

- **Ideia:** importância do vértice depende da importância dos vértices que apontam para ele

$$x_i = \sum_{j=1}^n a_{ji} x_j \leftarrow a_{ij} \neq a_{ji}$$

Problema?

- Vértices com grau de entrada zero?
- Zero em todos os vértices fora da CC

Centralidade de Katz

Como resolver o problema?

- **Idéia:** Todo vértice tem pequena importância intrínseca

$$x_i = \alpha \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + \beta \quad \leftarrow \text{alpha e beta não dependem da estrutura}$$

- Relação entre alpha e beta determina relação entre estrutura e aptidão externa
 - em geral beta = 1
- Centralidade de Katz

Centralidade de Katz

Qual valor para alpha?

$$x_i = \alpha \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + 1$$

- Alpha muito pequeno, centralidade dado por beta (1)
- Alpha muito grande, processo iterativo diverge
- Restrição para convergência:

$$\alpha < 1/\kappa_1 \quad \longleftarrow \text{maior autovalor de } A$$

Centralidade de PageRank

Problema com Katz?

- Vértice importantes espalham importância igualmente, independente do grau de saída
- Melhor intuição: espalhar importância proporcionalmente

$$x_i = \alpha \sum_{j=1}^n a_{ji} \frac{x_j}{d_j} + \beta$$

← Grau de saída de j

- Centralidade de PageRank, com $\beta=(1-\alpha)/N$
- Proposto e utilizada pelo Google

PageRank

- Interpretação original: surfista passeando pela Web de forma aleatória (*random surfer model*)
 - a cada página, escolhe hiperlink de maneira uniforme
- Importância: fração de visitas a cada página

Problema: Web não é conexa!

- Surfista dá saltos para qualquer página da web
 - a cada página, decide dar saltos aleatórios

Modelo é uma cadeia de Markov!

- Solução é dada pelas equações do slide anterior!

Personalized PageRank

- PageRank: ranqueamento absoluto dos vértices da rede
- Como obter ranqueamento relativo a um vértice?
 - importância do ponto de vista do vértice

Personalized PageRank (PPR)

- **Ideia:** retorno (salto) não é uniforme, mas sim para um vértice específico
 - difusão a partir deste vértice (i^*)

$$x_i = \alpha \sum_{j=1}^n a_{ji} \frac{x_j}{d_j^s} + \beta \leftarrow \begin{array}{ll} \beta = (1-\alpha), & \text{se } i = i^* \\ \beta = 0, & \text{se } i \neq i^* \end{array}$$

Rankeamento relativo a i^*