

# Redes Complexas – CPS 765

## 2025/3

Prof. Daniel R. Figueiredo

### Segunda Lista de Exercícios

ATENÇÃO! Para ajudar no processo de aprendizagem, explique suas repostas.

**Questão 1: Macacos digitando aleatoriamente.** Considere um macaco digitando aleatoriamente diante de um teclado com  $n$  letras e uma barra de espaço. O macaco tecla a barra de espaço com probabilidade  $q$ , e digita qualquer outra tecla com igual probabilidade, ou seja  $(1 - q)/n$ . O espaço é usado para delimitar palavras. Ao digitar aleatoriamente, nosso macaco vai produzir muitas palavras. Estamos interessados em calcular a frequência de ocorrência das palavras. Em particular, vamos mostrar que nosso macaco produz palavras cujo ranqueamento segue uma lei de potência!

1. Calcule  $q_k$ , a probabilidade do macaco digitar uma palavra específica com  $k$  letras. Mostre que  $q_k$  decresce exponencialmente com  $k$ .
2. Calcule quantas palavras distintas podem ser formadas com  $k$  letras.
3. Assumindo que todas as palavras com  $k$  letras ocorrem no ranqueamento antes das palavras com  $k + 1$  letras, determine a posição do ranqueamento da primeira palavra com  $k$  letras.
4. Considere a palavra na posição  $j$  do ranqueamento, para  $j = 1, 2, \dots$ . Quantas letras esta palavra possui?
5. Seja  $p_j$  a probabilidade do macaco gerar a  $j$ -ésima palavra do ranqueamento. Determine  $p_j$ .
6. Mostre que  $p_j$  segue uma lei de potência, ou seja,  $p_j = aj^{-b}$  para duas constantes  $a, b$ . Determine o expoente (valor de  $b$ ) em função dos parâmetros  $n, q$  do problema. Dica: use a equivalência  $x^{\log_y z} = z^{\log_y x}$  e ignore a função teto.
7. Qual é a relação entre os parâmetros  $n$  e  $q$  e o peso da cauda? Quando a cauda é mais pesada?

**Questão 2: MLE e Pareto.** Considere um conjunto de dados  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , com  $x_i > 0$  para todo  $i$ . Considere a modelagem destes dados por uma distribuição de Pareto. Responda às perguntas abaixo:

1. Determine analiticamente o valor da função de *log-likelihood* em função do parâmetro  $a$  da distribuição de Pareto. Que premissa você teve que fazer sobre os dados para chegar a esta função?
2. Determine analiticamente o estimador de máxima *likelihood* (MLE) do parâmetro  $a$ , encontrando o máximo da função de *log-likelihood*. **Dica:** derivar e encontrar a raiz.
3. Lembrando que o estimador  $\hat{a}$  é uma variável aleatória (pois depende das amostras), determine analiticamente seu valor esperado.

**Questão 3: Coeficiente de clusterização no  $G(n, p)$ .** Mostre que o valor esperado do coeficiente de clusterização local do modelo  $G(n, p)$  é  $p$ . **Dica:** Condicionar no grau do vértice.

**Questão 4: *Threshold function* para vértices isolados.** Queremos entender quando o grafo  $G(n, p)$  passa a não ter mais vértices isolados (vértices com grau zero). Mais especificamente, queremos determinar a *threshold function* para a seguinte propriedade  $P$ : “ausência de vértices isolados”. Seja  $E_0$  o valor esperado do número de vértices isolados. Determine  $E_0$  em função de  $n$  e  $p$ . Precisamos agora determinar uma função  $p(n)$  tal que  $E_0 \rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow \infty$ . Para facilitar, assumamos  $p(n) = c \frac{\ln(n)}{n}$ . Para quais valores de  $c > 0$  observamos a propriedade  $P$ ?

**Dica:** utilize a aproximação  $(1 - x) \approx e^{-x}$ .

**Questão 5: *Threshold function* para diâmetro 2.** Queremos analisar mais rigorosamente quando o grafo  $G(n, p)$  possui diâmetro igual a 2. Para isto, vamos considerar a seguinte propriedade  $P$ : “ausência de pares de vértices a distância maior que 2”. Seja  $E_{>2}$  o valor esperado do número de pares de vértices a distância maior que 2. Determine  $E_{>2}$  em função de  $n$  e  $p$ . Precisamos agora determinar uma função  $p(n)$  tal que  $E_{>2} \rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow \infty$ . Para facilitar, assumamos  $p(n) = \frac{c\sqrt{\ln(n)}}{\sqrt{n-2}}$ . Para quais valores de  $c > 0$  observamos a propriedade  $P$ ?

**Dica:** utilize as aproximações  $(1 - x) \approx e^{-x}$  e  $np + 1 \approx np$ .

**Questão 6: Modelo BA com habilidade.** No modelo BA, vimos que a probabilidade de um vértice  $v_i$  (que entrou na rede no tempo  $i$ ) ser incidente a uma nova aresta no tempo  $t > i$  é proporcional ao seu grau no tempo  $t$ , ou seja  $p_{i,t} \propto d_i(t)$ . Imagine agora um modelo onde cada vértice possui um atributo  $\alpha_i > 0$  aleatório que também afeta sua popularidade mas que é determinado no momento em que o vértice entra na rede (e não muda com o tempo). Neste modelo, temos  $p_{i,t} \propto d_i(t) + \alpha_i$ . Determine  $d_i(t)$  (na verdade, seu valor esperado) para este modelo.

**Dica:** Siga os passos utilizados para derivar  $d_i(t)$  no modelo original.

**Questão 7: Modelo WS.** Considere o modelo WS e responda as perguntas abaixo:

1. Considerando que  $p = 0$ , calcule analiticamente o coeficiente de clusterização local e a distância média entre um vértice e todos os outros da rede construída pelo modelo.
2. Considerando que  $p = 1$ , explique por que o coeficiente de clusterização local e a distância média não são estatisticamente idênticas ao modelo  $G(n, p)$ . Entretanto, argumente intuitivamente por que o modelo  $G(n, p)$  é uma boa aproximação neste caso, principalmente para os valores médios dessas métricas.

**Questão 8: Graus e clusterização do SBM.** Considere o *Stochastic Block Model* com 4 blocos e  $n_i = 1000 * i$  vértices em cada bloco  $i = 1, \dots, 4$ . Assuma que  $b_{i,i} = 0.1 * i$  e  $b_{i,j} = 0.01 * (i + j)$ , para  $i \neq j$ . Determine:

1. O valor esperado de grau de cada bloco do modelo de rede.
2. O valor esperado de grau do modelo de rede.
3. O valor esperado da clusterização de cada bloco do modelo de rede. Dica: aproximar usando apenas o subgrafo induzido pelo bloco.
4. O valor esperado da clusterização do modelo de rede.