

Redes Complexas – CPS 765

2025/3

Prof. Daniel R. Figueiredo

Segunda Lista de Exercícios

ATENÇÃO! Para ajudar no processo de aprendizagem, explique suas repostas.

Questão 1: Macacos digitando aleatoriamente. Considere um macaco digitando aleatoriamente diante de um teclado com n letras e uma barra de espaço. O macaco tecla a barra de espaço com probabilidade q , e digita qualquer outra tecla com igual probabilidade, ou seja $(1 - q)/n$. O espaço é usado para delimitar palavras. Ao digitar aleatoriamente, nosso macaco vai produzir muitas palavras. Estamos interessados em calcular a frequência de ocorrência das palavras. Em particular, vamos mostrar que nosso macaco produz palavras cujo ranqueamento segue uma lei de potência!

1. Calcule q_k , a probabilidade do macaco digitar uma palavra específica com k letras. Mostre que q_k decresce exponencialmente com k .
2. Calcule quantas palavras distintas podem ser formadas com k letras.
3. Assumindo que todas as palavras com k letras ocorrem no ranqueamento antes das palavras com $k + 1$ letras, determine a posição do ranqueamento da primeira palavra com k letras.
4. Considere a palavra na posição j do ranqueamento, para $j = 1, 2, \dots$. Quantas letras esta palavra possui?
5. Seja p_j a probabilidade do macaco gerar a j -ésima palavra do ranqueamento. Determine p_j .
6. Mostre que p_j segue uma lei de potência, ou seja, $p_j = aj^{-b}$ para duas constantes a, b . Determine o expoente (valor de b) em função dos parâmetros n, q do problema. Dica: use a equivalência $x^{\log_y z} = z^{\log_y x}$ e ignore a função teto.
7. Qual é a relação entre os parâmetros n e q e o peso da cauda? Quando a cauda é mais pesada?

Questão 2: MLE e Pareto. Considere um conjunto de dados x_1, x_2, \dots, x_n , com $x_i > 0$ para todo i . Considere a modelagem destes dados por uma distribuição de Pareto. Responda às perguntas abaixo:

1. Determine analiticamente o valor da função de *log-likelihood* em função do parâmetro a da distribuição de Pareto. Que premissa você teve que fazer sobre os dados para chegar a esta função?
2. Determine analiticamente o estimador de máxima *likelihood* (MLE) do parâmetro a , encontrando o máximo da função de *log-likelihood*. **Dica:** derivar e encontrar a raiz.
3. Lembrando que o estimador \hat{a} é uma variável aleatória (pois depende das amostras), determine analiticamente seu valor esperado.

Questão 3: Coeficiente de clusterização no $G(n, p)$. Mostre que o valor esperado do coeficiente de clusterização local do modelo $G(n, p)$ é p . **Dica:** Condicionar no grau do vértice.

Questão 4: Threshold function para vértices isolados. Queremos entender quando o grafo $G(n, p)$ passa a não ter mais vértices isolados (vértices com grau zero). Mais especificamente, queremos determinar a *threshold function* para a seguinte propriedade P : “ausência de vértices isolados”. Seja E_0 o valor esperado do número de vértices isolados. Determine E_0 em função de n e p . Precisamos agora determinar uma função $p(n)$ tal que $E_0 \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$. Para facilitar, assuma $p(n) = c \frac{\ln(n)}{n}$. Para qual valores de $c > 0$ observamos a propriedade P ?

Dica: utilize a aproximação $(1 - x) \approx e^{-x}$.

Questão 5: Threshold function para diâmetro 2. Queremos analisar mais rigorosamente quando o grafo $G(n, p)$ possui diâmetro igual a 2. Para isto, vamos considerar a seguinte propriedade P : “ausência de pares de vértices a distância maior que 2”. Seja $E_{>2}$ o valor esperado do número de pares de vértices a distância maior que 2. Determine $E_{>2}$ em função de n e p . Precisamos agora determinar uma função $p(n)$ tal que $E_{>2} \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$. Para facilitar, assuma $p(n) = \frac{c\sqrt{\ln(n)}}{\sqrt{n-2}}$. Para qual valores de $c > 0$ observamos a propriedade P ?

Dica: utilize as aproximações $(1 - x) \approx e^{-x}$ e $np + 1 \approx np$.

Questão 6: Modelo BA com habilidade. No modelo BA, vimos que a probabilidade de um vértice v_i (que entrou na rede no tempo i) ser incidente a uma nova aresta no tempo $t > i$ é proporcional ao seu grau no tempo t , ou seja $p_{i,t} \propto d_i(t)$. Imagine agora um modelo onde cada vértice possui um atributo $\alpha_i > 0$ aleatório que também afeta sua popularidade mas que é determinado no momento em que o vértice entra na rede (e não muda com o tempo). Neste modelo, temos $p_{i,t} \propto d_i(t) + \alpha_i$. Determine $d_i(t)$ (na verdade, seu valor esperado) para este modelo.

Dica: Siga os passos utilizados para derivar $d_i(t)$ no modelo original.

Questão 7: Modelo WS. Considere o modelo WS e responda as perguntas abaixo:

1. Considerando que $p = 0$, calcule analiticamente o coeficiente de clusterização local e a distância média entre um vértice e todos os outros da rede construída pelo modelo.
2. Considerando que $p = 1$, explique por que o coeficiente de clusterização local e a distância média não são estatisticamente idênticas ao modelo $G(n, p)$. Entretanto, argumente intuitivamente por que o modelo $G(n, p)$ é uma boa aproximação neste caso, principalmente para os valores médios dessas métricas.

Questão 8: Graus e clusterização do SBM. Considere o *Stochastic Block Model* com 4 blocos e $n_i = 1000 * i$ vértices em cada bloco $i = 1, \dots, 4$. Assuma que $b_{i,i} = 0.1 * i$ e $b_{i,j} = 0.01 * (i + j)$, para $i \neq j$. Determine:

1. O valor esperado de grau de cada bloco do modelo de rede.
2. O valor esperado de grau do modelo de rede.
3. O valor esperado da clusterização de cada bloco do modelo de rede. Dica: aproximar usando apenas o subgrafo induzido pelo bloco.
4. O valor esperado da clusterização do modelo de rede.