Redes Complexas – CPS 765
2025/3

Prof. Daniel R. Figueiredo

Terceira Lista de Exercícios

ATENÇÃO! Para ajudar no processo de aprendizagem, explique suas repostas.

Questão 1: Buscas com passeios. Considere um processo de busca em redes baseados em passeios aleatórios. Ou seja, para encontrar uma certa informação armazenada nos vértices da rede, realizamos um passeio aleatório a partir de um vértice qualquer. Considere as seguintes ideias para melhorar o desempenho do processo de busca.

1. Armazenar em cada vértice uma descrição da informação que cada vizinho possui.
2. Escolher o próximo vértice do passeio com probabilidade proporcional ao grau do vizinho, ao invés de uniforme.

Responda às perguntas abaixo.

1. Quais as vantagens e desvantagens de cada ideia acima.
2. Relacione as vantagens e desvantagens com a estrutura da rede. Ou seja, determine a influência da estrutura da rede no impacto da vantagem e desvantagem a serem observadas.

Questão 2: Falhas aleatórias. Considere o ponto crítico para existência de uma componente conexa gigante após falhas aleatórias de vértices na rede. Seja p a probabilidade de falha de um vértice da rede. Considere uma rede G que possua uma componente conexa gigante. Qual é o maior valor de p tal que G continue tendo uma componente conexa gigante? Determine este valor, ou seja, o ponto crítico, para as seguintes redes:

1. Modelo $G(n, p)$.
2. Modelo BA.
3. Distribuição de grau zeta com parâmetro α.
4. Grafo k-regular (i.e., todos os vértices possuem grau k).

Questão 3: Falhas em avalanche em rede de relacionamentos. Considere uma rede formada por k homens $v_1, v_2, \ldots, v_k$ e k mulheres $u_1, u_2, \ldots, u_k$ com a seguinte estrutura extremamente regular:

- Os pares v_i e u_i são casados.
- Cada mulher u_i é amiga das mulheres u_{i-1} e u_{i+1}, caso existam. O mesmo vale para os homens.
- Cada homem v_i, onde i é par, se interessa secretamente por u_{i-1}, esposa de seu amigo v_{i-1} e também amiga de sua esposa u_i. Caso u_{i-1} não fosse casada com v_{i-1}, v_i demonstraria seu interesse. O mesmo ocorre para mulheres u_i onde i é ímpar.
- Caso uma mulher u_i seja abordada por v_{i+1} (isso é, o marido-de-amiga pelo qual ela não se interessa), ela reporta imediatamente para a sua amiga u_{i+1}, que se divorcia de v_{i+1}. O mesmo comportamento ocorre nos homens.

Considerando a estrutura da rede acima e a dinâmica das arestas, responda as seguintes perguntas:

1. Explique o que acontece com a estrutura da rede quando um divórcio ocorre. Faça um desenho da rede antes e depois do divórcio.

2. Considere que divórcios ocorrem aleatoriamente e de forma uniforme. Determine o número médio de divórcios depois de um divórcio aleatório.

3. Agora, imagine que você consegue destruir casamentos de forma determinística. Quantos divórcios são necessários para que todos os homens e mulheres fiquem solteiros? Explique seu resultado.

Questão 4: Guloso eficiente. Descreva intuitivamente o resultado do modelo de Kleinberg. Em particular, apresente o desempenho do algoritmo guloso sob diferentes parametrizações do modelo, apresentando uma intuição para cada caso.

Questão 5: Modularidade e anel de comunidades. Considere uma rede formada por um anel com n_c cliques tal que cada clique possui k vértices. Cliques vizinhas no anel são conectadas por uma única aresta. Esta rede possui uma estrutura de comunidades óbvia, com cada clique correspondendo a uma comunidade.

1. Considere uma partição dos vértices onde cada clique pertence a uma comunidade. Determine a modularidade desta partição em função de n_c e k.

2. Considere uma partição dos vértices onde dois clique adjacentes pertencem a uma comunidade (assume que n_c é par). Determine a modularidade desta partição em função de n_c e k.

3. Determine uma condição em função de n_c e k tal que estrutura de comunidades natural tenha modularidade máxima. O que acontece quando esta condição é violada?

Questão 6: Epidemia entre espécies. Considere uma rede formada por K espécies de animais, cada uma com N_i membros, $i \in \{1, 2, \dots, K\}$. Arestas nesta rede capturam a convivência entre pares de animais (dentro e fora da mesma espécie), que é suficiente para a transmissão da doença. Considere o modelo epidemiológico SI, e para cada par i, j de espécies, os seguintes parâmetros:

- $\beta_{i \to j}$, a taxa de transmissão entre um animal da espécie i para um da espécie j ($\beta_{i \to j}$ não é necessariamente igual a $\beta_{j \to i}$).

- $a_{i,j}$, o número de arestas entre animais de espécies i e j.

Além disso, para cada espécie i também temos os parâmetros $\beta_{i \to i}$ e $a_{i,i}$ (definidos da mesma forma que anteriormente). Considere agora a evolução de uma epidemia SI nesta rede, onde $S_i(t)$ é número de animais susceptíveis da espécie i e $I_i(t)$ é número de animais infectados da espécie i.

Determine o sistema de equações que representa a evolução da epidemia nesta rede. Mais especificamente, $\frac{\partial I(t)}{\partial t}$. Dica: comece considerando $\frac{\partial I_i(t)}{\partial t}$ para cada espécie i, usando também a informação das arestas da rede.