Redes Complexas
Aula 8

Roteiro

- Modelo G(n, p)
- Funções de threshold
- Surgimento de subgrafos
- Componentes conexas
- Distâncias
- Automorfismos

Aula passada

- Modelos de redes
- Grafos aleatórios
- Modelo G(n,p)
- Propriedades

Modelo G(n,p)

- Modelo aleatório para grafos
  - Modelo clássico, Erdos-Reyni
- Dois parâmetros (determinísticos)
  - n: número de vértices
  - p: prob. de existência de cada aresta
- Cada possível aresta do grafo ocorre com probabilidade *p* independentemente
  - grafo não-direcionado, sem loops

Estudo das propriedades topológicas deste modelo

G(n,p) com p(n)

- p(n) é uma função de n
  - aula passada, p(n) = cte

Qual valor para p(n)?

- p(n) deve **decrescer** com n
- Exemplos (c é uma constante)

$$p(n) = \frac{c}{n^{1.5}} \qquad p(n) = \frac{c}{n} \qquad p(n) = \frac{c \log n}{n}$$

Propriedade de *Quase Todos os Grafos*

- Seja G um modelo de grafos aleatórios e X uma propriedade topológica
- Se

$$P\left[G\ possuir\ X\right] \to 1 \quad \text{quando} \quad n \to \infty$$

- Então dizemos que quase todos os grafos de G possuem propriedade X
  - X ocorre em G a.a.s. (*asymptotically almost surely*)

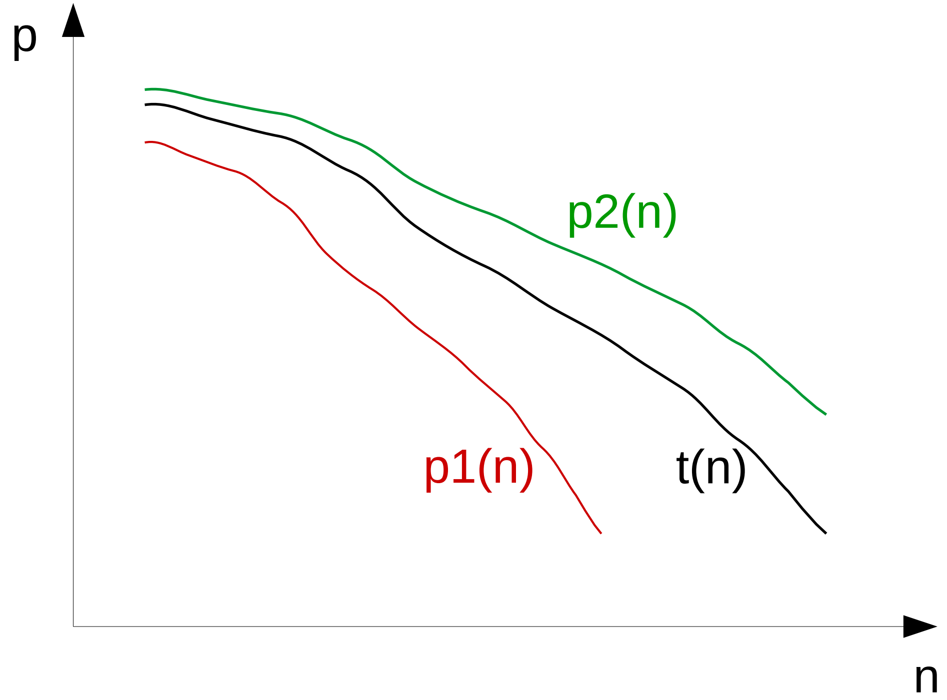
Funcões de Threshold

- Seja X uma propriedade estrutural monotônica
  - propriedade não se perde com a adição de arestas
- Dizemos que t(n) é uma *função de threshold* para propriedade X quando
  - Se $\dfrac{p(n)}{t(n)} \rightarrow 0$ Então G(n,p) **não possui** a propriedade X, a.a.s.
  - Se $\dfrac{p(n)}{t(n)} \rightarrow \infty$ Então G(n,p) **possui** a propriedade X, a.a.s.

t(n) é *divisor de águas* para X!

Exemplo

- X = “sua propriedade monotônica favorita”
- *t*(*n*) é função de threshold para X
- Se p(n) decresce mais rápido, então grafo G(n,p) não possui X, a.a.s.
- Se p(n) decresce mais devagar, então grafo G(n,p) possui, a.a.s.



- p1(n): G(n,p) não possui X, a.a.s.
- p2(n): G(n,p) possui X, a.a.s.

Subgrafo H

- Dado um grafo H (não rotulado)
- Prob. de H ser subgrafo de G(n,p)?
  - para n grande o suficiente
- Probabilidade tende a zero ou tende a um
- Depende apenas do número de vértices e arestas de H e de p(n)
- Resultados específicos para grafos balanceados

Resultado binário é surpreendente!

- com desdobramentos para combinátoria

Grafo Balanceado

- **Intuitivamente**: Grafo H que não possui partes muito diferentes
- Grau médio de um subgrafo H’ de H
- Considere subgrafo induzido H’ de H
  - subgrafo que contém todas arestas de G entre vértices de H’
- Grafo H é balanceado se grau médio de todo subgrafo induzido H’ é menor ou igual ao grau médio de H
- Ex. de grafos balanceados
  - árvores, ciclos, grafos completos

Subgrafo H

- Dado um grafo H (não rotulado) balanceado
  - k vértices e l arestas (l > 0)
- Prob. de H ser subgrafo de G(n,p)?
  - H “aparece” em G(n,p) se existe ao menos um subgrafo de G que seja isomorfo a H
- Propriedade X = “H é subgrafo de G(n,p)”
  - propriedade de ser subgrafo é monotônica

$t(n) = n^{-k/l}$ é *função de threshold* para X

Exemplo de Árvores

- H = árvore com k > 1 vértices (ordem k)
  - necessariamente, k-1 arestas
- Quando que tais árvores aparecem no G(n,p)?

$$t(n) = n^{-k/(k-1)}$$

é função de threshold para árvores de ordem k

- Se p(n) decresce mais rápido, então grafo G(n,p) não possui árvore de ordem k, a.a.s.
- Se p(n) decresce mais devagar, então grafo G(n,p) possui árvore de ordem k, a.a.s.
- Pergunta: Se p(n) = n^{-1} árvores de que tamanho ocorrem como subgrafos?

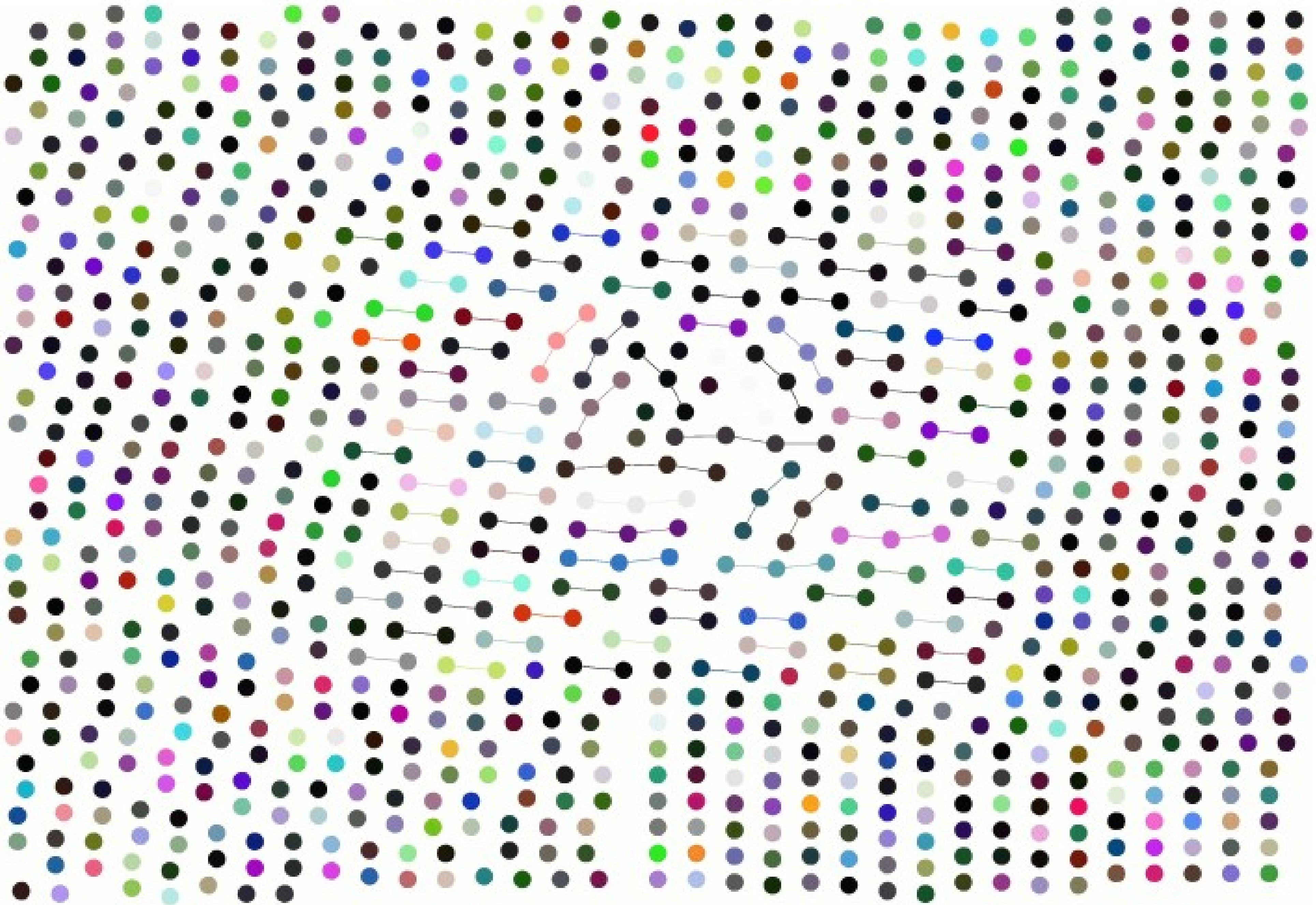
Exemplo de Ciclos

- H = ciclo com k > 2 vértices (tamanho k)
  - necessariamente, k arestas
- Quando que tais ciclos aparecem no G(n,p)?

$t(n) = n^{-1}$ é função de threshold para qualquer ciclo de tamanho fixo

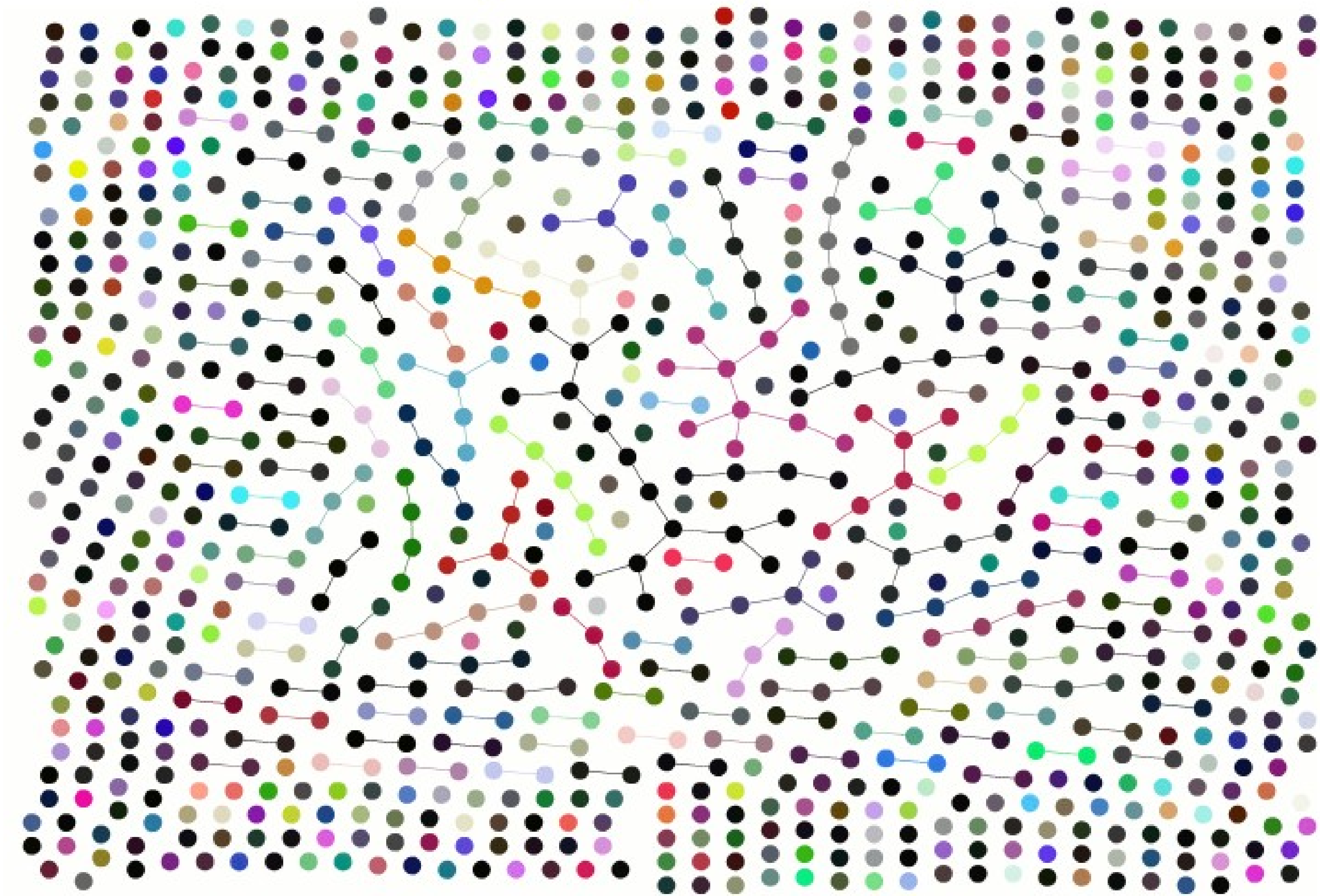
- Se p(n) decresce mais rápido, então grafo G(n,p) não possui ciclo de tamanho k, a.a.s.
- Se p(n) decresce mais devagar, então grafo G(n,p) possui ciclo de tamanho k, a.a.s.

G(1000,0.2/1000)



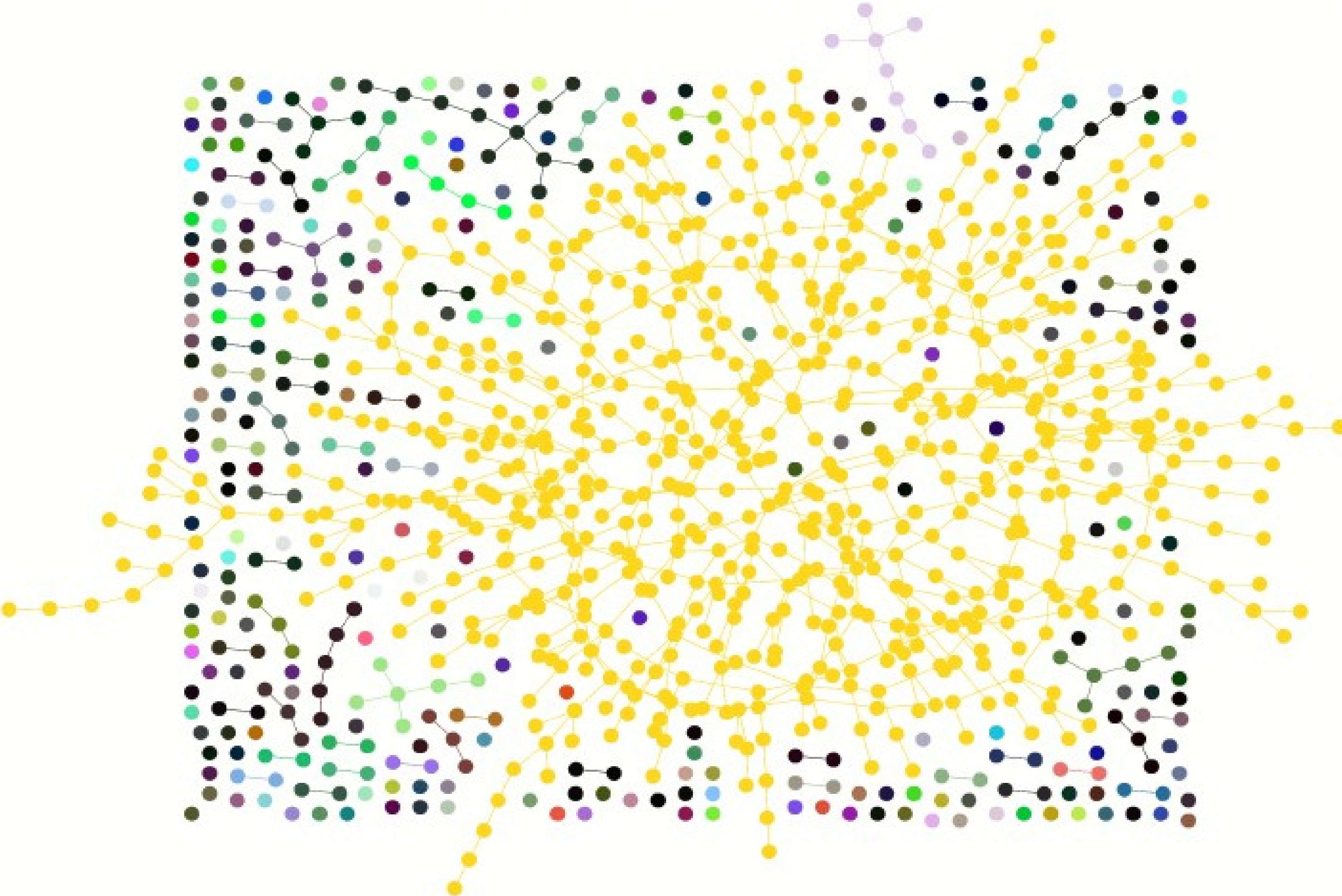
Figueiredo – 2021

G(1000,0.5/1000)



Figueiredo – 2021

G(1000,1.5/1000)



G(n,p) com grau médio fixo

- Grau médio fixo, igual a z

$$p(n) = z/(n-1)$$

- Propriedades estruturais dependem de z
  - estudo em função de z
- Mais refinado do que funções de threshold

Intuição?

- Divisor de águas: $z < 1$, $z > 1$?

Componentes Conexas

- z : grau médio constante
- $z < 1$ (subcrítico)
  - componentes conexas tem tamanho $O(\log n)$ (a.a.s.)
  - Muitas componentes conexas
- $z > 1$ (supercrítico)
  - maior componente conexa tem tamanho $\Omega(n)$
  - todas outras de tamanho $O(\log n)$

Transição de fase na estrutura do grafo!

Grau Médio Crescente

- Outra função interessante

$$p(n) = \frac{\log n}{n}$$

- Grau médio cresce devagar, como log n
- É função de threshold para algumas (importantes) propriedades estruturais

G(n,p) é Conexo

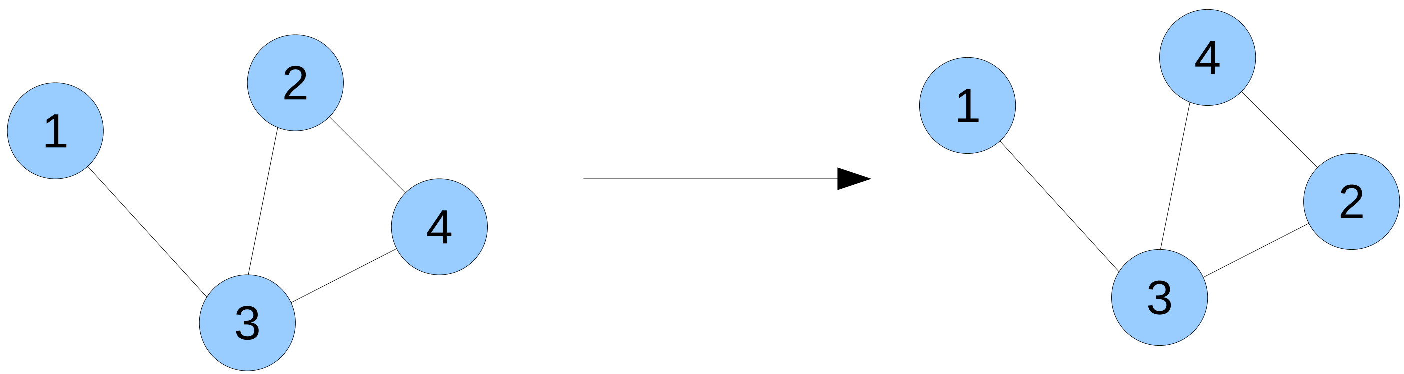
- Quando G(n,p) é conexo?
  - p(n) > 1/n temos CC gigante
- t(n) = log n / n é função de threshold para G(n,p) ser conexo
  - p(n) > log n / n temos G(n,p) conexo, a.a.s.
- Como provar este resultado?
- **Ideia:** mostrar que o número de vértices isolados vai a zero
- Mostrar que o número de componentes conexas pequenas vai a zero

G(n,p), distância média

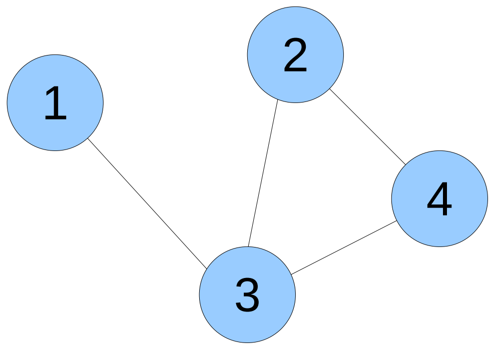
- Distância média entre os vértices
  - vértices da componente gigante
- Assumir $p(n) = z / (n - 1)$, $z > 1$
- Distância média no G(n,p) é O(log n/log z) a.a.s.
- Como provar este resultado?
- Ideia: escolher dois vértices aleatórios, mostrar que um alcança o outro depois de log n / log z saltos
- Usar processo de ramificação

Automorfismos

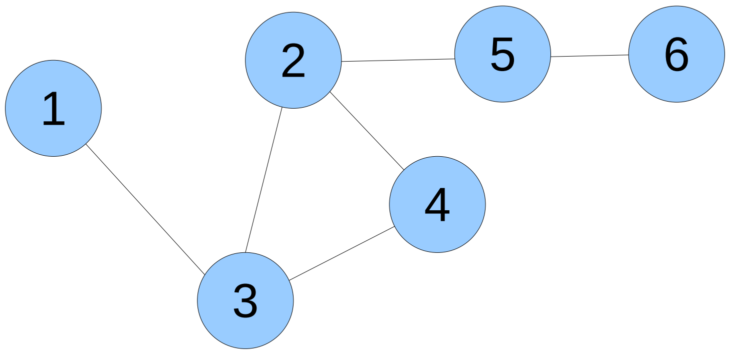
- Permutação dos rótulos dos vértices que não modifica o conjunto de arestas



- Alguns grafos possuem automorfismos, outros não



Simétrico (possui ao menos 1 automorfismo)



Assimétrico (não possui automorfismos)

Automorfismos no G(n,p)

- Quando G(n,p) é assimétrico?
  - não possui automorfismos
- Se $p(n) > c \log n / n$, G(n,p) não possui automorfismos a.a.s.
  - vértices são estruturalmente únicos, pois não temos simetria no grafo
- Não é função de threshold
  - ser assimétrico não é monotônico
  - grafos muito densos voltam a ser simétricos