Redes Complexas
Aula 9

Roteiro

- Aplicando o G(n,p)
- Avaliando o modelo
- Preferential attachment
- Modelo BA
- Propriedades

Aula passada

- Modelo G(n, p)
- Funções de threshold
- Surgimento de subgrafos
- Componentes conexas
- Distâncias
- Automorfismos

Aplicando o G(n,p)

- Como aplicar modelo G(n,p) a uma rede real?
- Determinar parâmetros do modelo de acordo com a rede real
  - parâmetros: *n* e *p*
- Ex. AS Graph, 10697 vértices e 31992 arestas

Quanto vale *n* e *p* neste caso?

Aplicando o G(n,p)

- Determinar *p* de forma a preservar grau médio da rede real
- Grau médio da rede real com n vértices e m arestas $\longrightarrow \bar{d} = \frac{2m}{n}$
- Grau médio do G(n,p) $\longrightarrow \bar{d}_G = (n-1)p$
- Igualando e resolvendo para *p*, temos

$$p = \frac{2m}{n(n-1)} = \frac{m}{\binom{n}{2}} = \rho \longleftarrow \text{Densidade da rede real}$$

Exemplos

- AS Graph, 10697 vértices e 31992 arestas
  - $d = 5.98$
  - $p = 0.00056$
- Rede de atores, 449913 vértices e 25516482 arestas
  - $d = 113.4$
  - $p = 0.00025$
- Rede metabólica, 765 vértices 3686 arestas
  - $d = 9.67$
  - $p = 0.0126$

Observação?

- *p* geralmente é muito pequeno (redes reais possuem densidade muito baixa)

Utilidade do Modelo G(n,p)

- O quão bom é o modelo G(n,p) para representar redes reais?

Captura fielmente número de vértices e grau médio!

- Isso é suficiente?
- Depende do propósito do modelo

Captura outros aspectos estruturais de redes reais?

Aspectos Estruturais

- Presente em muitas redes reais
  - distâncias pequenas
  - alta clusterização
  - distribuição do grau em cauda pesada
- Modelo G(n,p)
  - Distâncias: O(log n / log z)
  - Clusterização (média): p
  - Distribuição do grau: Binomial(n-1, p)

Muito diferentes!

Aspectos fundamentais para muitas aplicações

Exemplo

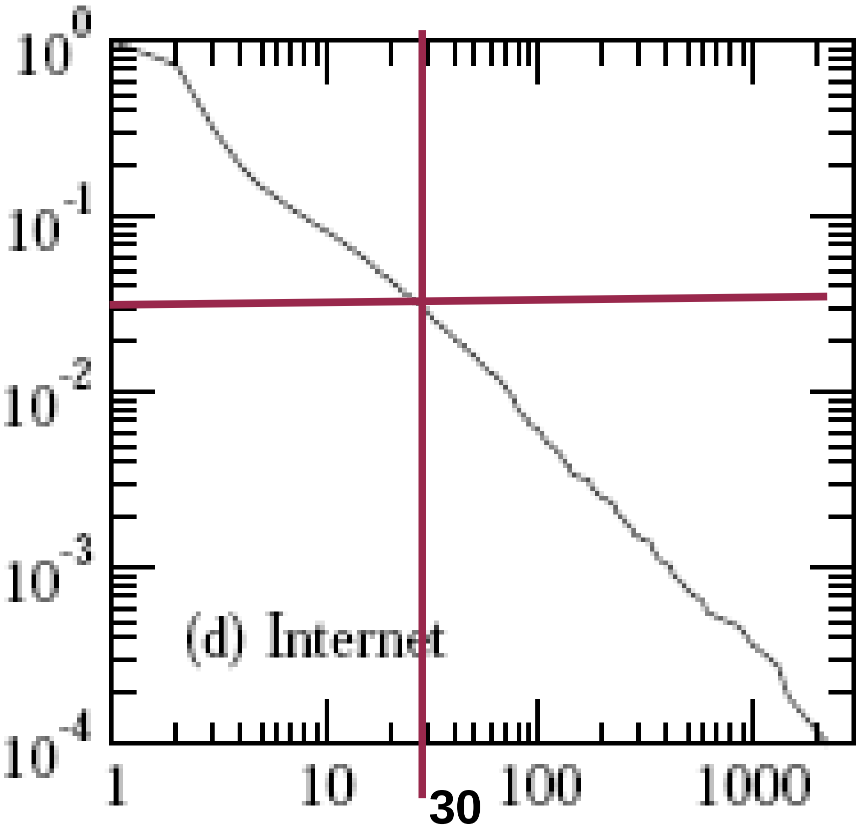
- AS Graph, 10697 vértices e 31992 arestas
- Distância média
  - rede real: 3.31
  - modelo: O(log n/log z) = 5.18
- Clusterização
  - rede real: 0.39
  - modelo: p = 0.00056

~1000 vezes menor!

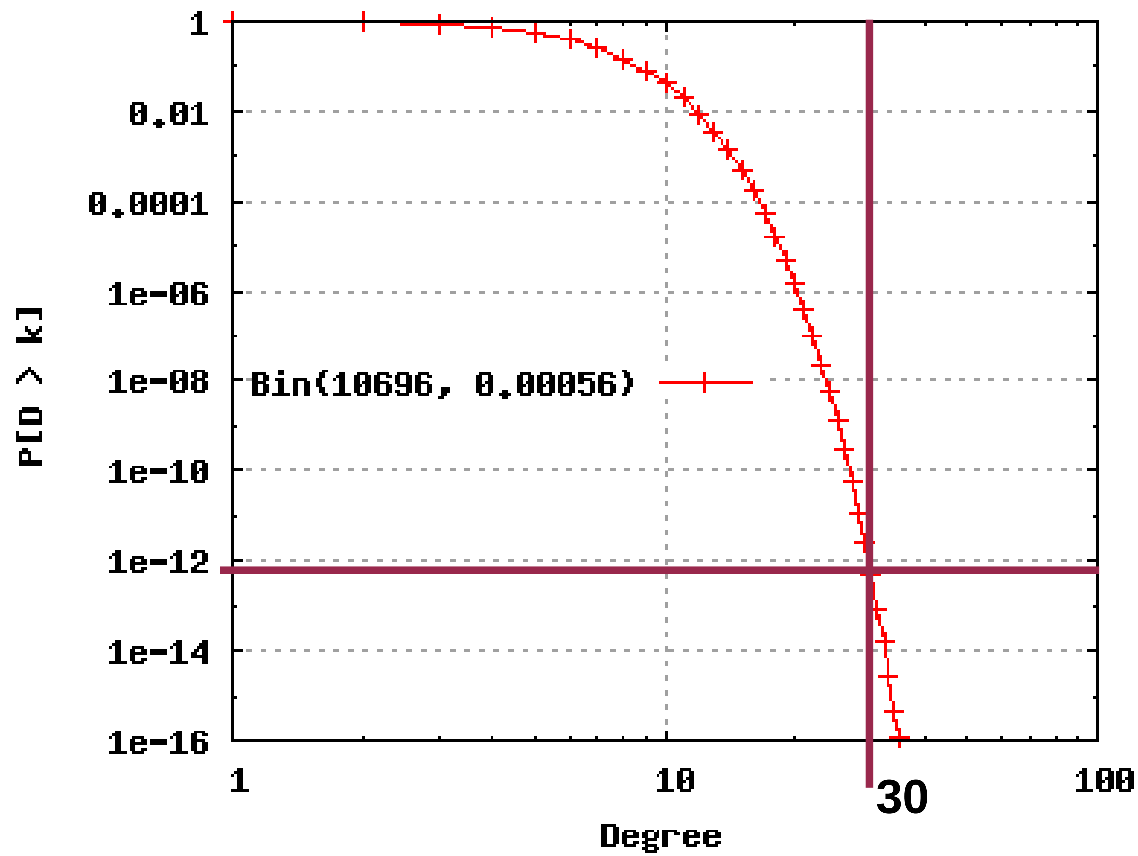
Exemplo

- AS Graph, 10697 vértices e 31992 arestas
- Distribuição do grau: P[D > k]

Rede real



Modelo G(n,p), parametrizado



Fudamentalmente diferente!

Modelos de Rede

- **Objetivo**: modelos matemáticos que capturem aspectos importantes de redes reais
- Modelos diretos
  - Modelo define diretamente estrutura do grafo, número de vértices é fixo
  - ex. G(n,p), modelo com sequência de graus
- Modelos de crescimento (*growth*)
  - baseados em algum processo incremental ou evolucionário, número de vértices cresce
  - Processo iterativo constroi a rede

Modelos de Crescimento

- Vértices e arestas são adicionados (ou removidos) incrementalmente
  - refletem o “crescimento” da rede
- Processo gerador tenta capturar a realidade
  - estrutura observada na rede é consequência do processo gerador
- Explicam o surgimento das propriedades estruturais nas redes
  - a partir de um processo gerador simples

Muitos modelos propostos são desta classe

Preferential Attachment (PA)

- Regra fundamental (e antiga) de formação
  - aka. cumulative advantage, rich-gets-richer, Matthew effect
- **Idéia:** objetos têm preferência em se *relacionar* com objetos mais populares
  - popularidade é função dos relacionamentos
  - objetos mais populares “atraem” novos objetos, aumentando sua popularidade
- Ideia que possui muitas aplicações, observada em diversos contextos

Exemplos (PA)

- Criação de links na web (Barabasi et al 99)
  - Páginas novas tendem a criar links para páginas com mais links
- Aglomeração de pessoas em cidades (Zipf 32)
  - Cidades maiores tendem a atrair mais pessoas
- Espécies de plantas de um mesmo gênero (Yule 25)
  - Mutações são mais prováveis em gênero com mais espécies, levando a outras espécies
- Número de artigos publicados (Simon 55)
  - Novos artigos tendem a ter co-autores que publicaram mais artigos

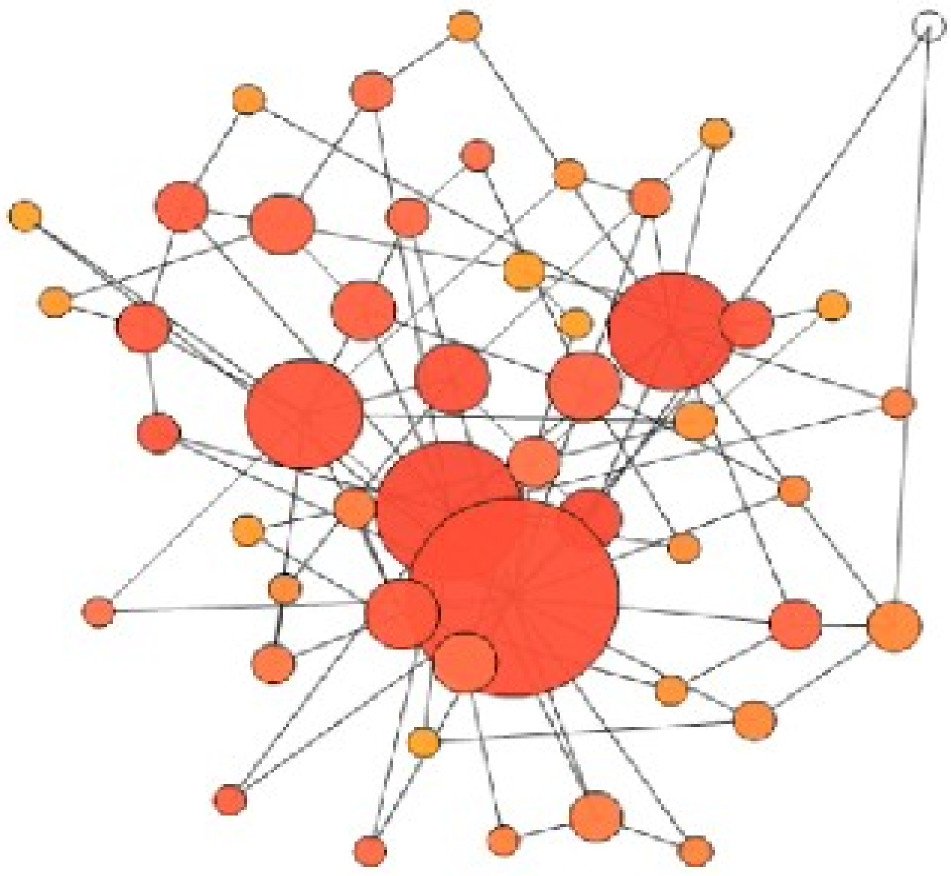
Modelo BA (Barabási-Albert)

- Modelo aleatório para redes baseado em PA (Barabasi, Albert 99, +40K citações)
  - objetos são vértices e popularidade é dada pelo grau do vértice
- Processo de formação
  - inicialmente rede é um pequeno clique
  - a cada passo, adicionar 1 vértice com grau m
  - vértices adjacentes escolhidos aleatoriamente, com prob. proporcional ao seu grau
- *m* é parâmetro do modelo
  - clique inicial não é (muito) importante

PA Exemplo

- Clique inicial com 3 vértices, m = 2
- Tamanho do vértice proporcional ao grau

PA Exemplo



- "*Rich gets richer*" em ação!
- Muitos vértices com grau 2 (mínimo), alguns com grau muito maior

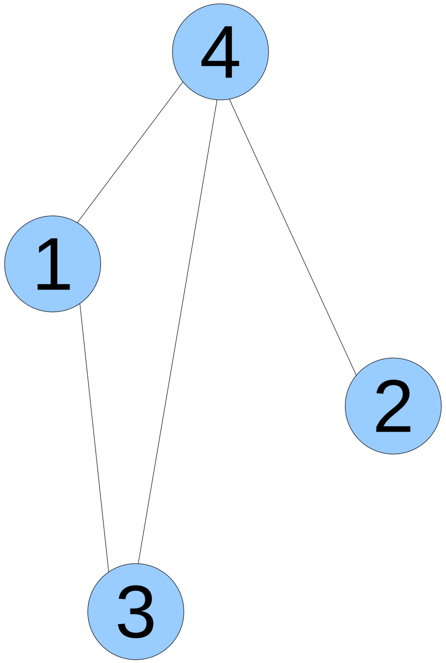
Definindo Preferências

- Dado rede $G_t=(V_t, E_t)$ no instante t = 1,...
- $d_u(t)$: grau do vértice u no instante t
- Considere a chegada de um novo vértice no instante t
  - vértice traz m arestas
- $p_u(t)$: prob. do vértice u ser incidente a uma nova aresta no instante t

$$p_u(t)=\frac{d_u(t)}{\sum_{v\in V} d_v(t)}=\frac{d_u(t)}{2mt}$$

m*t = número de arestas adicionadas até t

PA Exemplo



$$p_u(t) = \frac{d_u(t)}{\sum_{v \in V} d_v(t)}$$

$$\sum_{v \in V} d_v = 2 + 1 + 2 + 3 = 8$$

$$p_1 = 2/8 = 1/4$$

$$p_2 = 1/8$$

$$p_3 = 2/8 = 1/4$$

$$p_4 = 3/8$$

Evolução do Grau do Vértice

- Quanto vale $d_u(t)$?
  - $d_u(t)$ é uma v.a. discreta
- Iremos fazer uma aproximação
  - Assumir $d_u(t)$ é determinístico (valor esperado)
  - Logo $d_u(t)$ é contínuo
- Quanto vale variação de $d_u(t)$ no instante t ?
  - grau de u só pode crescer, taxa depende de *m* e sua probabilidade de receber aresta

$$\frac{dd_u}{d_t} = m\, p_u(t) \longrightarrow \frac{dd_u}{d_t} = \frac{d_u}{2t}$$

Evolução do Grau do Vértice

- Condições inicias
  - assumir que vértice u entra no instante t_u
  - ao entrar, vértice tem m arestas: $d_u(t_u) = m$
- Resolver diferencial, com condição inicial

$$\frac{dd_u}{d_t} = \frac{d_u}{2t} \longrightarrow d_u(t) = m\left(\frac{t}{t_u}\right)^{1/2}$$

- Dependência temporal no grau
  - grau cresce como sqrt(t)
  - mais antigos (menor t_u) tem grau maiores

Distribuição do Grau

- Distribuição de grau da rede no tempo t
  - distribuição depende do tempo?

$$P[d_u(t) < k]$$

- Assumir que instante de entrada é uniforme
  - vértice u entra entre [1, t], t_u é v.a.
  - substituindo $d_u(t)$

$$P[d_u(t) < k] = P[t_u > m^2 t / k^2] = 1 - \frac{m^2}{k^2}$$

$m^2/k^2 < 1$, e definem uma fração do intervalo [1, t]

Distribuição do Grau

- Transformando a CDF em PDF
  - diferenciando a CDF, pois é uma aproximação contínua

$$P[d_u(t)=k] \approx \frac{2m^2}{k^3}$$

Lei de potência na distribuição do grau com expoente 3

Observações sobre PA

- Fenômenos observados empiricamente podem ser modelados por PA
- Modelo leva ao surgimento de *lei de potência* na popularidade dos objetos
- PA como *explicação* para leis de potência observadas empiricamente
  - lei de potência surge, pois processo de formação segue o paradigma de PA
- **Cuidado**: nem toda lei de potência é explicada por PA

Limitação do Modelo BA

- Lei de potência com expoente 3
  - muitas redes tem outros expoentes
- Vértices mais antigos tem grau maiores
  - vértices novos não tem chance de se tornarem mais populares
- Vértices criam arestas somente no instante de chegada
  - não há dinâmica entre vértices já na rede
- Rede gerada tem baixa clusterização

Todas as limitações acima superadas em modelos subsequentes!