REGULARIDADE - COMO USAR

GUILHERME MOTA (IME/USP)

Sumário

1. Introdução

Muitas vezes em combinatória extremal é necessário fazer uso de ferramentas avançadas para se chegar à solução de um determinado problema. Um resultado muito importante nesta área é o famoso Lema da Regularidade de Szemerédi, que trata da questão de aproximar um grafo qualquer por um grafo formado pela união de uma quantidade constante de grafos bipartidos aleatórios. De forma vaga, Szemerédi mostrou que, dado um grafo, é possível particionar seu conjuntos de vértices em um número limitado de partes (que não depende da quantidade de vértices do grafo) de modo que "quase todo" par destas partes se assemelha a um grafo bipartido aleatório. Desta maneira, é possível, através do estudo de grafos aleatórios, obter resultados sobre grafos quaisquer.

2. Regularidade - Caso denso

Para definir precisamente o que significa um par de conjuntos de vértices ser semelhante a um grafo aleatório, precisamos definir o conceito de par regular.

Seja G um grafo. Dados $\varepsilon > 0$ e $A, B \subset V(G)$ subconjuntos disjuntos de vértices, dizemos que o par (A, B) é *ε-regular* se, para todo $X \subset A$ e $Y \subset B$, tais que $|X| \geq \varepsilon|A|$ e $|Y| \geq \varepsilon B$, temos

$$\left| \frac{e(A,B)}{|A||B|} - \frac{e(X,Y)}{|X||Y|} \right| \leq \varepsilon.$$

Ou seja, um par (A, B) é regular se, para todos subconjuntos suficientemente grandes de A e B, a densidade $e(X, Y)/(|X||Y|)$ entre tais conjuntos é muito próxima à densidade entre A e B.

É fácil ver que qualquer par suficientemente grande de vértices de $G_{n,p}$ é ε-regular com alta probabilidade. Portanto, faz sentido que um par (A, B) de um grafo G seja considerado "parecido" com um grafo aleatório quando tal par é ε-regular. Existem diversas outras propriedades, todas equivalentes, que são compartilhadas por grafos aleatórios. Para saber mais sobre tais propriedades, veja os trabalhos de Chung, Graham e Wilson sobre quase-aleatoriedade [1]. Agora estamos aptos a enunciar o Lema da Regularidade de Szemerédi.

Lema 1 (Lema da Regularidade de Szemerédi [10])**.** *Sejam $\varepsilon > 0$ e $m \in \mathbb{N}$. Existem constantes $M = M(m, \varepsilon)$ e $n_0 = n_0(m, \varepsilon)$, tais que, para qualquer grafo G com pelo menos n_0 vértices, existe uma partição $V_0, V_1, \ldots, V_k$ dos vértices de G em $k + 1$ classes, com $m \leq k \leq M$, onde valem as seguintes asserções:*

- $|V_0| \leq \varepsilon|V(G)|$;
- $|V_1| = \ldots = |V_k|$;
- *No máximo εk^2 pares não são ε-regulares.*

Dizemos que tal partição é ε-regular.

Um fato que não pode deixar de ser notado é que o lema só nos dá informações sobre grafos densos, isto é, grafos com $\Theta(n^2)$ arestas. De fato, se um grafo G possui $o(n^2)$ arestas, o lema é trivialmente satisfeito, pois as arestas de G podem todas pertencer a um grafo formado somente por pares irregulares, uma vez que é permitida uma quantidade quadrática destes pares.

Outro ponto importante a ser observado é o papel que as constantes m e M têm. A constante m limita inferiormente a quantidade de classes da partição, fazendo com que o número de vértices em cada parte seja suficientemente pequena. Assim, não existem muitas arestas em cada parte, proporcionalmente falando. A constante M, por sua vez, não permite que a quantidade de classes seja muito grande, evitando assim a possibilidade de se obter uma partição regular trivial (por exemplo, uma partição onde cada parte possui exatamente um vértice). Uma ótima referência sobre o Lema da Regularidade é o trabalho de Komlós e Simonovits [7].

2.1. **Aplicações.** Em geral, para aplicar com sucesso o Lema da Regularidade, é necessário utilizá-lo em conjunto com alguns outros resultados. Daremos abaixo as definições necessárias e os enunciados destes resultados, depois apresentaremos uma espécie de "manual" para o uso da regularidade na resolução de problemas (lembrando que tal manual é somente uma idéia de como o lema é utilizado usualmente) e mostraremos como provar, utilizando o Lema da Regularidade de Szemerédi, alguns resultados clássicos da teoria extremal de grafos.

2.1.1. *Preliminares.* Uma definição importantíssima no contexto de regularidade é a de grafo reduzido. Dados um grafo G, uma partição de $V(G)$ em classes $V_0, V_1, \ldots, V_k$ e constantes ε, $\delta > 0$, definimos o *grafo reduzido* $R = R(\varepsilon, \delta)$ de G como o grafo com conjunto de vértices $[k]$ (cada um deles representando uma das classes $V_1, \ldots, V_k$), onde existe uma aresta entre cada par de vértices se e somente se as classes correspondentes formam um par ε-regular com densidade pelo menos δ em G. A importância do grafo reduzido R está no fato de que, mesmo sendo bem mais simples que o grafo G, possui muitas propriedades semelhantes às de G.

Dados um grafo G e um inteiro $t > 0$, definimos o "*blow-up*" $G[t]$ de G como sendo o grafo onde o conjunto de vértices é obtido através da substituição de cada vértice v de G por um conjunto V_v com t vértices e existe uma aresta entre vértices $v \in V_v$ e $w \in V_w$ de $G[t]$ se e somente se $\{v, w\}$ é uma aresta em G.

Seja R um grafo, t um inteiro positivo e $\delta > \varepsilon > 0$. Dizemos que $\bar{\mathcal{G}}(R, t, \varepsilon, \delta)$ é a família dos grafos G com mesmo conjunto de vértices de $R[t]$, onde G é um subgrafo de $R[t]$ e, sempre que $ij \in E(R)$, o par (V_i, V_j) é ε-regular em G com densidade no mínimo δ, onde V_i é o conjunto de vértices em $R[t]$ referentes ao vértice i de R. Portanto, $\bar{\mathcal{G}}(R, t, \varepsilon, \delta)$ é uma família de subgrafos geradores de blow-ups $R[t]$ que tem R como seu grafo reduzido. Vamos nos referir a tais grafos como *blow-ups regulares* de R.

2.1.2. *Lemas auxiliares.* Abaixo, temos duas versões de um lema conhecido como "Key Lemma" (sua versão fraca é conhecida como Lema de Imersão e sua versão forte como Lema de Contagem), que garante a existência de um certo grafo H como subgrafo de um grafo G que possui determinadas propriedades. Em geral, utilizamos tais lemas para mostrar que, se um grafo reduzido R possui um certo grafo H como subgrafo, então um blow-up regular de R com densidade suficientemente grande também contém H como subgrafo. Utilizando tais lemas, podemos obter informações sobre um grafo através da análise de propriedades de seus grafos reduzidos.

Lema 2 (Key Lemma - versão fraca). *Seja H um grafo e $\delta > 0$. Existem $\varepsilon > 0$ e $M \in \mathbb{N}$ tal que, se $m \geq M$ e $G \in \bar{\mathcal{G}}(H, m, \varepsilon, \delta)$, então $H \subset G$.*

Lema 3 (Key Lemma)**.** *Seja R um grafo, m, t e Δ inteiros positivos e ε, δ tais que $\delta > \varepsilon > 0$. Tome $\varepsilon_0 = (\delta - \varepsilon)^{\Delta}/(2 + \Delta)$. Tome também um grafo $H \subset R[t]$ com grau máximo não maior que Δ. Se $G \in \bar{\mathcal{G}}(R, m, \varepsilon, \delta)$, com $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ e $t < \varepsilon_0 m$, então $H \subset G$. Na verdade, G possui no mínimo $(\varepsilon_0 m)^{|V(H)|}$ cópias de H.*

À primeira vista, pode ser difícil de captar a essência do Key Lemma. Intuitivamente, tais resultados dizem que se H é subgrafo de um blow-up de R, e G é um blow-up regular de R grande o suficiente, então $H \subset G$.

Um resultado que muitas vezes é útil na resolução de problemas através da utilização do Lema da Regularidade de Szemerédi é o Teorema de Turán.

Teorema 4 (Teorema de Turán [11])**.** *Seja G um grafo com n vértices e r um inteiro positivo. Se G possui mais que $(1 - 1/r)n^2/2$ arestas, então G possui um K_{r+1}.*

2.1.3. *Aplicação geral.* Abaixo, mostramos um modelo geral de aplicação do Lema da Regularidade, lembrando mais uma vez que esta é somente uma forma simples de resolução de problemas utilizando o lema obtido por Szemerédi. Existem diversas aplicações, em diversas áreas de conhecimento, que utilizam o Lema da Regularidade de Szemerédi de formas bem surpreendentes. Considerando G o grafo em que desejamos resolver o problema, segue o modelo.

- **Aplique o Lema da Regularidade** para obter uma partição ε-regular $V_0, V_1, \ldots, V_k$ do conjunto de vértices de G, com ε e m apropriados.
- **"Limpe" o grafo**, removendo arestas relacionadas com V_0, entre pares irregulares, pares esparsos e arestas contidas dentro das classes. Tal procedimento removerá no máximo $\varepsilon' n^2$ arestas, onde $\varepsilon' = \varepsilon'(\varepsilon)$.
- **Gere o grafo reduzido** R com conjunto de vértices $[k]$, onde ij é uma aresta de R se e somente se o par (V_i, V_j) é ε-regular e possui densidade grande o suficiente.
- **Aplique lemas auxiliares ao grafo** R para obter o que deseja (por exemplo, Teorema de Turán, para garantir a existência de cliques).
- **Utilize o Key Lemma** para obter o resultado desejado.

Abaixo vamos ilustrar o uso do Lema da Regularidade provando alguns resultados clássicos. Primeiramente, um resultado muito importante, conhecido como "Triangle Removal Lemma", onde utilizaremos alguns passos citados acima e, depois, o Teorema de Erdős–Stone–Simonovits, onde seguiremos exatamente todos os passos.

Teorema 5 (Triangle Removal Lemma - [8]). *Para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, se G é um grafo com no máximo δn^3 triângulos, então a remoção de εn^2 arestas torna G livre de triângulos.*

Demonstração. Fixe $\varepsilon > 0$. Seja G um grafo com no máximo δn^3 triângulos, para $\delta = \delta(\varepsilon)$ suficientemente pequeno. Seguindo o manual dado, temos o seguinte.

Passo 1 (Lema da Regularidade de Szemerédi).

Vamos aplicar o lema para um $\varepsilon' = \varepsilon'(\varepsilon, \delta)$ suficientemente pequeno (mas não tão pequeno, para ser possível aplicar o Key Lemma no final da prova) e $m = 1/\varepsilon'$. Aplicando o Lema da Regularidade de Szemerédi, obtemos uma partição $V_0, V_1, \ldots, V_k$ dos vértices do grafo G.

Passo 2 (Limpando o grafo).

Vamos gerar um grafo G' obtido da remoção de algumas arestas de G. Considerando a partição $V_0, V_1, \ldots, V_k$ obtida, existem no máximo

- $\varepsilon' n^2$ arestas com pelo menos um ponta em V_0, dado que $|V_0| \leq \varepsilon' n$.
- $\varepsilon' k^2 (n/k)^2$ arestas entre pares (V_i, V_j) com $1 \leq i < j \leq k$ que não são ε'-regulares
- $k(n/k)^2$ arestas dentro de classes V_i com $1 \leq i \leq k$.
- $\binom{k}{2}\delta(n/k)^2$ arestas entre pares com densidade não maior que δ (pares esparsos).

Assim, se estas são as arestas removidas para formar G', temos que G' é um subgrafo de G onde foram removidas no máximo a seguinte quantidade de arestas.

$$\begin{aligned}
&\varepsilon' n^2 + \varepsilon' k^2 (n/k)^2 + k(n/k)^2 + \binom{k}{2}(\delta)(n/k)^2 \\
\leq &\left(2\varepsilon' + \frac{1}{k} + \frac{\delta}{2}\right) n^2 \\
\leq &\left(3\varepsilon' + \frac{\delta}{2}\right) n^2 \\
\leq &\varepsilon n^2,
\end{aligned}$$

onde a penúltima desigualdade segue da escolha de m e pelo fato de $k \geq m$, e a última desigualdade segue da escolha de ε'. Assim, removendo as arestas entre pares esparsos, pares não regulares e arestas dentro das classes, obtemos um grafo $G' \subset G$ obtido da remoção de no máximo εn^2 arestas de G.

Passo 3 (Gerando o grafo reduzido).

Seja R o grafo reduzido de G associado a $V_1, \ldots, V_k$ com parâmetros ε' e δ, isto é, as arestas de R correspondem a pares ε'-regulares com densidade superior a δ em G, mas estas são justamente as arestas de G'. Suponha, por contradição, que G' contém um triângulo. Pela construção do grafo reduzido R, sabemos que ele também possui um triângulo.

Passo 5 (Utilizando o Key Lemma).

Se R possui um triângulo, então $R[t]$ também possui um triângulo,para todo $t \geq 1$. Desta forma, pelo Key Lemma, desde que n' seja suficientemente grande e δ suficientemente pequeno, grafos do conjunto $\bar{\mathcal{G}}(R, n', \varepsilon', \delta)$ contém pelo menos $\varepsilon'' n^3 > \delta n^3$ triângulos, para $\varepsilon'' = \varepsilon''(\varepsilon')$. Mas observe que $G' \in \bar{\mathcal{G}}(R, n', \varepsilon', \delta)$, para algum $n' \geq n/(mM)$. Portanto, G' contém pelo menos $\varepsilon'' n^3 > \delta n^3$ triângulos, uma contradição, pois assumimos que G possui no máximo δn^3 triângulos.

□

Observe que, como a existência de triângulos foi suposta por nós (para obter a contradição), então não foi necessário usar nenhum resultado auxiliar (como o Teorema de Turán) para garantir a existência desta estrutura. No teorema abaixo será necessário fazer uso do Teorema de Turán para garantir a existência de um grafo fixo H como subgrafo do grafo obtido após a remoção das arestas indesejadas.

Abaixo provaremos o Teorema de Erdős–Stone–Simonovits.

Teorema 6. [2] *Seja H um grafo. Temos que*

$$\mathrm{ex}(n, H) = \left(1 - \frac{1}{\chi(H) - 1} + o(1)\right) \binom{n}{2},$$

onde $\mathrm{ex}(n, H)$ *é o maior número de arestas que um grafo com n vértices livre de H pode ter.*

Demonstração. Vamos provar que, para todo $\delta > 0$, existe n_0, tal que se $n \geq n_0$ e G é um grafo com n vértices onde

$$e(G) \geq \left(1 - \frac{1}{\chi(H) - 1} + \delta\right) \binom{n}{2},$$

então $H \subset G$. Para isso, seguiremos o modelo de prova dado anteriormente. Seja $\delta > 0$ e considere n suficientemente grande. Suponha que G seja um grafo com n vértices com pelo menos a quantidade de arestas citada acima.

Passo 1 (Lema de Szemerédi).

Vamos aplicar o lema para um ε suficientemente pequeno e $m = 1/\varepsilon$. Aplicando o Lema da Regularidade de Szemerédi, obtemos uma partição $V_0, V_1, \ldots, V_k$ dos vértices do grafo G.

Passo 2 (Limpando o grafo).

Vamos gerar um grafo G' obtido da remoção de algumas arestas de G. Considerando a partição $V_0, V_1, \ldots, V_k$ obtida, existem no máximo

- εn^2 arestas com pelo menos um ponta em V_0, dado que $|V_0| \leq \varepsilon n$.
- $\varepsilon k^2(n/k)^2$ arestas entre pares (V_i, V_j) com $1 \leq i < j \leq k$ que não são ε-regulares.
- $k(n/k)^2$ arestas dentro de classes V_i com $1 \leq i < j \leq k$.
- $\binom{k}{2}(\delta/4)(n/k)^2$ arestas entre pares (V_i, V_j) com $1 \leq i < j \leq k$ que tenham densidade não maior que $\delta/4$ (pares esparsos).

Assim, se estas são as arestas removidas para formar G', temos que G' é um subgrafo de G onde foram removidas no máximo a seguinte quantidade de arestas.

$$\begin{aligned}
&\varepsilon n^2 + \varepsilon k^2(n/k)^2 + k(n/k)^2 + \binom{k}{2}(\delta/4)(n/k)^2 \\
&\leq \left(2\varepsilon + \frac{1}{k} + \frac{\delta}{8}\right) n^2 \\
&\leq \left(3\varepsilon + \frac{\delta}{8}\right) n^2 \\
&\leq \left(\frac{\delta}{7}\right) n^2,
\end{aligned}$$

onde a penúltima desigualdade segue da escolha de m e pelo fato de $k \geq m$, e a última desigualdade segue da escolha de ε.

Para todo n suficientemente grande, temos que

$$\left(\frac{\delta}{7}\right) n^2 \leq \left(\frac{\delta}{3}\right)\binom{n}{2}.$$

Assim, removendo as arestas entre pares esparsos, pares não regulares e arestas dentro das classes, obtemos um grafo $G' \subset G$ tal que

$$\begin{aligned}
e(G') &\geq \left(1 - \frac{1}{\chi(H) - 1} + \delta\right)\binom{n}{2} - \left(\frac{\delta}{3}\right)\binom{n}{2} \\
&= \left(1 - \frac{1}{\chi(H) - 1} + \frac{2\delta}{3}\right)\binom{n}{2}.
\end{aligned}$$

Passo 3 (Gerando o grafo reduzido).

Seja R o grafo reduzido de G associado a $V_1, \ldots, V_k$ com parâmetros ε e $\delta/4$, isto é, as arestas de R correspondem a pares ε-regulares com densidade superior a $\delta/4$ em G, mas estas são justamente as arestas de G'. Assim, para todo n suficientemente grande,

$$\begin{aligned}
e(R) &\geq e(G')\left(\frac{k}{n}\right)^2 \\
&\geq \left(1 - \frac{1}{\chi(H)-1} + \frac{2\delta}{3}\right)\binom{n}{2}\left(\frac{k}{n}\right)^2 \\
&\geq \left(1 - \frac{1}{\chi(H)-1} + \frac{\delta}{2}\right)\frac{k^2}{2}.
\end{aligned}$$

Passo 4 (Aplicando o Teorema de Turán).

Como o grafo R possui mais que $(1-1/(\chi(H)-1))k^2/2$ arestas e possui k vértices, então, pelo Teorema de Turán, sabemos que R possui um subgrafo isomorfo ao K_r, onde $r = \chi(H)$. Sem perda de generalidade, suponha que os vértices deste K_r correspondem às classes $V_1, \ldots, V_r$.

Passo 5 (Utilizando o Key Lemma).

Observe que, pela definição do grafo reduzido R, o subgrafo G^* de G' induzido por $V_1 \cup \ldots \cup V_r$ pertence a $\bar{\mathcal{G}}(K_r, n', \varepsilon, \delta/4)$, onde $n' \geq n/(mM)$. Como $r = \chi(H)$, temos que $H \subset K_r[|V(H)|]$. Portanto, como H é um grafo fixo tal que $H \subset K_r[|V(H)|]$ e $G^* \in \bar{\mathcal{G}}(K_r, n', \varepsilon, \delta/4)$, desde que n' seja grande o suficiente, podemos aplicar o Key Lemma, concluindo assim que $H \subset G^* \subset G' \subset G$. $\square$

3. Regularidade - Caso esparso

Discutiremos agora uma versão do Lema da Regularidade de Szemerédi que funciona para grafos esparsos [4, 6, 3]. Para enunciar esta versão do lema, deixe-nos dar algumas definições. Dados um grafo G e $X, Y \subset V(G)$, denotamos por $E_G(X, Y)$ o conjunto de arestas entre X e Y, com $e_G(X, Y) = |E_G(X, Y)|$.

Definição 7 ((η, p)-uniformidade ((η, p)-uniformidade superior))**.** *Seja G um grafo com n vértices. Considere $0 \leq \eta \leq 1$ e $0 \leq p \leq 1$. Dizemos que G é* (η, p)-uniforme *se, para todos $X, Y \subset V(G)$ disjuntos tais que $|X|, |Y| \geq \eta n$, temos*

$$|e_G(X, Y) - p|X||Y|| \leq \eta p|X||Y|.$$

Se em vez de $|e_G(X, Y) - p|X||Y|| \leq \eta p|X||Y|$ temos somente $e_G(X, Y) \leq (1 + \eta)p|X||Y|$, então dizemos que G é (η, p)-uniforme superior*.*

As seguintes definições relativas à densidade e a pares regulares serão necessárias para enunciarmos o Lema da Regularidade e para discutirmos algumas aplicações do lema.

Definição 8 (Densidade relativa)**.** *Sejam G um grafo e $X, Y \subset V(G)$. Se H é um subgrafo gerador de G, definimos a* densidade relativa *entre H e G para o par (X, Y) como*

$$d_{H,G}(X, Y) = \frac{e_H(X, Y)}{e_G(X, Y)},$$

sempre que $e_G(X, Y) > 0$. Caso contrário, $d_{H,G}(X, Y) = 0$.

Definição 9 (p-densidade)**.** *Sejam H um grafo e $X, Y \subset V(H)$. Definimos a* densidade *de (X, Y) em H como*

$$d_{H,p}(X, Y) = \frac{e_H(X, Y)}{p|X||Y|}.$$

Definição 10 (Pares regulares - densidade relativa)**.** *Sejam G e H grafos com mesmo conjunto de vértices V e $\varepsilon > 0$. Se X e Y são subconjuntos disjuntos de V, então dizemos que o par (X, Y) é* (ε, H, G)-regular *se, para todos $X' \subset X$ e $Y' \subset Y$ tais que $|X'| \geq \varepsilon|X|$ e $|Y'| \geq \varepsilon|Y|$, temos que*

$$|d_{H,G}(X', Y') - d_{H,G}(X, Y)| \leq \varepsilon.$$

Definição 11 (Pares regulares)**.** *Seja $H = (V, E)$ um grafo e $\varepsilon > 0$. Se X e Y são subconjuntos disjuntos de V, então dizemos que o par (X, Y) é* (ε, H, p)-regular *se, para todos $X' \subset X$ e $Y' \subset Y$*

tais que $|X'| \geq \varepsilon|X|$ *e* $|Y'| \geq \varepsilon|Y|$*, temos que*

$$|d_{H,p}(X', Y') - d_{H,p}(X, Y)| \leq \varepsilon.$$

Se $H = (X \cup Y, E)$ *é o grafo bipartido com conjunto de vértices* $X \cup Y$*, então dizemos que o grafo* H *é* (ε, p)*-regular. Ademais, se* $|e(X', Y')/|X'||Y'| - e(X, Y)/|X||Y|| \leq \varepsilon e(X, Y)/|X||Y|$*, dizemos que* H *é simplesmente* (ε)*-regular.*

Podemos agora enunciar o Lema da Regularidade de Szemerédi em sua versão esparsa. Daremos duas versões, onde a diferença básica é que, na primeira delas, precisamos que o grafo H em que o Lema da Regularidade será aplicado seja um subgrafo gerador de um grafo (η, p)-uniforme.

Lema 12 (Lema da Regularidade - versão esparsa I [4])**.** *Dados* $\varepsilon > 0$ *e* $m \geq 1$*, existem* $\eta = \eta(\varepsilon, m) > 0$ *e* $M = M(\varepsilon, m) \geq m$ *tais que, se* G *é um grafo* (η, p)*-uniforme com* n *vértices,* $0 < p \leq 1$ *e* H *é um subgrafo gerador de* G*, ambos com conjunto de vértices* V*, então existe uma partição* $V_0, V_1, \ldots, V_k$ *de* V*, onde* $m \leq k \leq M$*, tal que*

- $|V_0| \leq \varepsilon n$*;*
- $|V_1| = \ldots = |V_k|$*;*
- *no máximo* $\varepsilon\binom{k}{2}$ *pares* (V_i, V_j)*, com* $1 \leq i < j \leq n$*, não são* (ε, H, G)*-regulares.*

Dizemos que tal partição é (ε, H, G)*-regular.*

Lema 13 (Lema da Regularidade - versão esparsa II [4])**.** *Dados* $\varepsilon > 0$ *e* $m \geq 1$*, existem* $\eta = \eta(\varepsilon, m) > 0$ *e* $M = M(\varepsilon, m) \geq m$ *tais que, para qualquer grafo* H (η, p)*-uniforme superior com* n *vértices,* $0 < p \leq 1$*, existe uma partição* $V_0, V_1, \ldots, V_k$ *de* $V(H)$*, onde* $m \leq k \leq M$*, tal que*

- $|V_0| \leq \varepsilon n$*;*
- $|V_1| = \ldots = |V_k|$*;*
- *no máximo* $\varepsilon\binom{k}{2}$ *pares* (V_i, V_j)*, com* $1 \leq i < j \leq n$*, não são* (ε, H, p)*-regulares.*

Dizemos que tal partição é (ε, H, p)*-regular.*

3.1. **Aplicações.** Assim como no caso denso, existem alguns conceitos importantes que precisam ser definidos. Sempre que afirmarmos que um evento ocorre *assintoticamente quase certamente*, ou *a.q.c.*, queremos dizer que o evento ocorre com probabilidade $1 - o(1)$.

Definição 14 (Blow-up)**.** *Dados um grafo* H *e um inteiro* $n > 0$*, definimos o "*blow-up*"* $H[n]$ *de* H *como sendo o grafo onde o conjunto de vértices é obtido através da substituição de cada vértice*

v de H por um conjunto V_v com n vértices e existe uma aresta entre vértices $v \in V_v$ e $w \in V_w$ de $H[n]$ se e somente se $\{v, w\}$ é uma aresta em H.

Definição 15 ($\mathcal{G}(H, n, m, \varepsilon)$)**.** *Seja H um grafo, n, m inteiros positivos e $\varepsilon > 0$. Dizemos que $\mathcal{G}(H, n, m, \varepsilon)$ é a família dos grafos G com mesmo conjunto de vértices de $H[n]$, onde G é um subgrafo de $H[n]$ tal que, sempre que $ij \in E(H)$, o par (V_i, V_j) é (ε)-regular com exatamente m arestas, onde V_i é o conjunto de vértices em $H[n]$ referente ao vértice i de H.*

Definição 16 ($\mathcal{F}(H, n, m, \varepsilon)$)**.** *Seja H um grafo, n, m inteiros positivos e $\varepsilon > 0$. Dizemos que $\mathcal{F}(H, n, m, \varepsilon)$ é o conjunto de grafos em $\mathcal{G}(H, n, m, \varepsilon)$ que não contém subgrafos isomorfos a H.*

Portanto, se estamos pensando em obter um lema de contagem que funcione bem para grafos esparsos, desejamos que $\mathcal{F}(H, n, m, \varepsilon)$ seja um conjunto pequeno de grafos. Se tivermos m suficientemente grande e ε suficientemente pequeno, é esperado que isto aconteça. Tal conjectura foi proposta por Kohayakawa, Łuczak e Rödl [5].

Conjectura 17. [5] *Seja H um grafo fixo. Para quaisquer $\beta > 0$ e $\eta > 0$, existem constantes $\varepsilon_0 > 0$, $C > 0$ e $n_0 > 0$ tais que, se $m \geq Cn^{2-1/m^{(2)}(H)}$, $n \geq n_0$ e $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, então*

$$|\mathcal{F}(H, n, m, \varepsilon)| \leq \beta^m \binom{n^2}{m}^{|E(H)|}.$$

Os três autores citados acima também propuseram uma importante conjectura sobre o número extremal de $G_{n,p}$ (Teorema 19), que foi provada recentemente por Schacht [9].

Definição 18 (2-densidade)**.** *Dado um grafo H com $|V(H)| \geq 3$, definimos sua 2-densidade como*

$$m^{(2)}(H) = \max\left\{\frac{|E(F)| - 1}{|V(F)| - 2} \colon F \subset H,\ |V(F)| \geq 3\right\}.$$

Teorema 19. [9] *Seja H um grafo fixo com $|V(H)| \geq 3$. Se $0 < p = p(n) \leq 1$ com $pn^{-1/m^{(2)}(H)} \to \infty$, então, a.q.c.*

$$\mathrm{ex}(G_{n,p}, H) \leq \left(1 - \frac{1}{\chi(H) - 1} + o(1)\right) |E(G_{n,p})|,$$

onde $\mathrm{ex}(G, H)$ é o máximo de arestas que um subgrafo de G pode ter sem que tenha uma cópia de H, isto é, $\mathrm{ex}(G, H) = \max\{e(F) \colon H \nsubseteq F \subset G\}$.

O teorema abaixo mostra que é possível obter o Teorema 19 a partir da Conjectura 17. Na prova deste resultado, é utilizado o Lema da Regularidade para grafos esparsos.

Teorema 20. [3] *Se H é um grafo fixo tal que $m^{(2)}(H) > 1$, então o Teorema 19 segue da Conjectura 17.*

Vamos provar o Teorema 20 fazendo uso de alguns lemas. Primeiramente, enunciamos uma conhecida desigualdade de concentração para variáveis aleatórias binomiais.

Lema 21. *[Limitantes de Chernoff] Se X é uma variável aleatória com distribuição $\mathrm{Bi}(n,p)$ e $\lambda = np$, então, para $t \geq 0$,*

$$\Pr(X \geq \mathbb{E}(X) + t) \leq e^{-\frac{t^2}{2(\lambda+t/3)}};$$

$$\Pr(X \leq \mathbb{E}(X) - t) \leq e^{-\frac{t^2}{2\lambda}}.$$

Lema 22. *Seja H um grafo fixo com $m^{(2)}(H) \geq 1$. Para todo $0 < \delta \leq 1$ e todo $C > 0$, se $p \geq Cn^{-1/m^{(2)}(H)}$, então a.q.c. $G_{n,p}$ tem mais que $(1-\delta)n^2p/2$ arestas e é (δ,p)-uniforme.*

Demonstração. Fixe $0 < \delta \leq 1$ e $C > 0$. Considere $p \geq Cn^{-1/m^{(2)}(H)}$. Seja $e(G_{n,p})$ a quantidade de arestas de $G_{n,p}$. Sabemos que $\mathbb{E}(e(G_{n,p})) = n(n-1)p/2$. Para n suficientemente grande, temos que $t = n^2p\delta/2 - np/2 > 0$. Aplicando o Lema 21 para este t, temos

$$\begin{aligned}
\Pr\left(e(G_{n,p}) \leq \frac{n^2p}{2}(1-\delta)\right) &\leq \exp\left\{-\frac{\left(\frac{n^2p\delta}{2} - \frac{np}{2}\right)^2}{n(n-1)p}\right\} \\
&\leq \exp\left\{-\frac{(\delta n - 2)(n^3p^2\delta)}{4n^2p}\right\} \\
&\leq \exp\left\{-\frac{C(\delta n - 2)}{4}\right\} \\
&= o(1),
\end{aligned}$$

onde a última desigualdade segue da escolha de p e do fato de $m^{(2)}(H) \geq 1$.

Resta mostrar que a.q.c. $G_{n,p}$ é (δ,p)-uniforme. Sejam $X, Y \subset V(G_{n,p})$ tais que $|X|, |Y| \geq \delta n$ e $e_{G_{n,p}}(X,Y)$ a quantidade de arestas entre X e Y. Sabemos que $\mathbb{E}(e_{G_{n,p}}(X,Y)) = |X||Y|p$. Assim, aplicando o Lema 21 com $t = \delta p|X||Y|$, obtemos

$$\begin{aligned}
\Pr(e_{G_{n,p}}(X,Y) \leq (1-\delta)|X||Y|p) &\leq \exp\left\{-\frac{t^2}{2|X||Y|p}\right\} \\
&= \exp\left\{-\frac{\delta^2|X|^2|Y|^2p^2}{2|X||Y|p}\right\} \\
&= \exp\left\{-\frac{\delta^2}{2}|X||Y|p\right\} \\
&\leq \exp\left\{-\frac{C\delta^4}{2}n\right\} \\
&= o(1).
\end{aligned}$$

Temos também

$$\begin{aligned}
\Pr(e_{G_{n,p}}(X,Y) \geq (1+\delta)|X||Y|p) &\leq \exp\left\{-\frac{t^2}{2\left(|X||Y|p + \frac{\delta|X||Y|p}{3}\right)}\right\} \\
&= \exp\left\{-\frac{\delta^2|X|^2|Y|^2p^2}{2\left(|X||Y|p + \frac{\delta|X||Y|p}{3}\right)}\right\} \\
&\leq \exp\left\{-\frac{3\delta^2}{2(3+\delta)}|X||Y|p\right\} \\
&\leq \exp\left\{-\frac{C3\delta^4}{2(3+\delta)}n\right\} \\
&= o(1).
\end{aligned}$$

Assim, concluímos que a.q.c. $|e_{G_{n,p}}(X,Y) - |X||Y|p| \leq \delta|X||Y|p$, isto é, $G_{n,p}$ é (δ,p)-uniforme.

□

No lema abaixo vamos ignorar tetos e pisos sempre que não forem essenciais. Isto dará uma maior clareza na exposição do resultado.

Lema 23. *Dado um grafo H com $m^{(2)}(H) > 1$, se a Conjectura 17 é válida, então, para todo $\delta > 0$, existe $\varepsilon_\delta = \varepsilon_\delta(\delta) > 0$ tal que, para todo $\mu > 0$, existe $C_\mu = C_\mu(\mu) > 0$ tal que, para todo $p \geq C_\mu n^{-1/m^{(2)}(H)}$, temos a.q.c. que $G_{n,p}$ não contém grafos de $\bigcup_{n' \geq \mu n} \mathcal{F}(H, n', \delta n'^2 p, \varepsilon_\delta)$.*

Demonstração. Seja H um grafo fixo com $m^{(2)}(H) > 1$. Considere a Conjectura 17 válida e fixe $\delta > 0$. Seja $\beta = (\delta/e^2)^{|E(H)|}$. Sejam $n_\delta = n_0(\beta, H)$, $\varepsilon_\delta = \varepsilon_0(\beta, H)$ e $C_\delta = C(\beta, H)$ as constantes obtidas pela aplicação da Conjectura 17. Fixe $\mu > 0$ e faça $C_\mu = C_\delta/(\delta\mu^2)$, com $p \geq C_\mu n^{-1/m^{(2)}(H)}$.

Seja X a quantidade de subgrafos de $G_{n,p}$ que pertencem a $\bigcup_{n' \geq \mu n} \mathcal{F}(H, n', \delta n'^2 p, \varepsilon_\delta)$. Vamos mostrar que $\mathbb{E}(X) = o(1)$. Uma vez mostrado este fato, o resultado segue, pois, pela desigualdade de Markov, $\Pr(X > 0) \leq \mathbb{E}(X)$. Observe que

$$\mathbb{E}(X) \leq \sum_{n' \geq \mu n} n^{|V(H)|n'} p^{|E(H)|\delta n'^2 p} |\mathcal{F}(H, n', \delta n'^2 p, \varepsilon_\delta)|. \tag{1}$$

Precisamos limitar superiormente os termos que aparecem no somatório acima. Se $n' \geq \mu n$, então, para limitar $|\mathcal{F}(H, n', \delta n'^2 p, \varepsilon_\delta)|$, precisamos mostrar que $\delta n'^2 p \geq C_\delta n'^{2-1/m^{(2)}(H)}$, pois desta forma a Conjectura 17 nos dá um limite superior. Para tal, observe que, desde que n seja suficientemente grande, temos $\mu n \geq n_\delta$. Assim,

$$\begin{aligned}
\delta n'^2 p &\geq \delta (\mu n)^2 p \\
&\geq \delta (\mu n)^2 C_\mu n^{-1/m^{(2)}(H)} \\
&\geq C_\delta n^{2-1/m^{(2)}(H)} \\
&\geq C_\delta n'^{2-1/m^{(2)}(H)}.
\end{aligned}$$

Assim, a Conjectura 17 nos diz que, para todo $n' \geq \mu n$,

$$|\mathcal{F}(H, n', \delta n'^2 p, \varepsilon_\delta)| \leq \left(\frac{\delta}{e^2}\right)^{|E(H)|\delta n'^2 p} \binom{n'^2}{\delta n'^2 p}^{|E(H)|}. \tag{2}$$

Sabendo que $\binom{n}{k} \leq (en/k)^k$ e $m^{(2)}(H) > 1$, substituindo (2) em (1), temos

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &\leq \sum_{n' \geq \mu n} n^{|V(H)|n'} \left(\frac{\delta}{e^2} \frac{en'^2 p}{\delta n'^2 p}\right)^{|E(H)|\delta n'^2 p} \\
&\leq n^{(|V(H)|+1)n} e^{-|E(H)|\delta \mu^2 n^2 p} \\
&\leq n^{\theta(n)} e^{-\theta(n^{2-1/m^{(2)}(H)})} \\
&= o(1).
\end{aligned}$$

□

O seguinte lema diz que se B é um grafo bipartido (δ)-regular, então existe um subgrafo de B um pouco menos regular, mas com um número de arestas conhecido.

Lema 24 ([3])**.** *Para todo $0 < \delta \leq 1/6$, existe $C = C(\delta)$ tal que qualquer grafo bipartido $B = (V_1 \cup V_2, E)$ que é (δ)-regular e contém um subgrafo gerador (2δ)-regular com exatamente m arestas, desde que $C(|V_1| + |V_2|) \leq m \leq |E|$.*

Podemos agora partir para a prova do Teorema 20.

Demonstração do Teorema 20. Fixe um grafo H. Mostraremos que, para todo $0 < \delta < 1/34$, existe $C = C(\delta) > 0$ tal que, para todo $p \geq Cn^{-1/m^{(2)}(H)}$ é verdade que $G_{n,p}$ satisfaz a.q.c. o seguinte.

$$\mathrm{ex}(G_{n,p}, H) \leq \left(1 - \frac{1}{\chi(H) - 1} + 18\delta\right) e(G_{n,p}),$$

isto é, todo subgrafo $G \subset G_{n,p}$ com

$$e(G) \geq \left(1 - \frac{1}{\chi(H) - 1} + 18\delta\right) e(G_{n,p})$$

possui a.q.c. uma cópia de H.

Fixe $\delta > 0$. Pelos Lemas 22 e 23, existe ε_δ tal que, para todo $\mu > 0$, existe $C_\mu = C_\mu(\mu) > 0$ tal que, para todo $p \geq C_\mu n^{-1/m^{(2)}(H)}$, $G_{n,p}$ possui as seguintes propriedades a.q.c.

- $e(G_{n,p}) > (1 - \delta)n^2p/2$;
- $G_{n,p}$ é (μ, p)-uniforme;
- $G_{n,p}$ não contém nenhum grafo de $\bigcup_{n' \geq \mu n} \mathcal{F}(H, n', \delta n'^2 p, \varepsilon_\delta)$.

Sejam $\varepsilon = \min\{\delta\varepsilon_\delta/2, \delta/6\}$ e $m \geq 1/\varepsilon$ tal que, para todo $k \geq m$,

$$\mathrm{ex}(k, H) \leq \left(1 - \frac{1}{\chi(H) - 1} + \delta\right) \frac{k^2}{2},$$

onde tal m existe, pelo Teorema de Erdős–Stone–Simonovits. O Lema 13 (Lema da Regularidade de Szemerédi, versão esparsa) nos fornece constantes $\eta = \eta(\varepsilon, m)$ e $M = M(\varepsilon, m)$.

Seja $\mu = \min\{\eta, \delta/2, (1 - \varepsilon)/(2M), \varepsilon\}$ e considere um grafo J tal que

- $e(J) > (1 - \delta)n^2p/2$;
- J é (μ, p)-uniforme superior;
- J não contém nenhum grafo de $\bigcup_{n' \geq \mu n} \mathcal{F}(H, n', \delta n'^2 p, \varepsilon_\delta)$.

Isto é, J satisfaz às propriedades que a.q.c. $G_{n,p}$ satisfaz. Seja G é um subgrafo qualquer de J tal que

$$e(G) \geq \left(1 - \frac{1}{\chi(H) - 1} + 18\delta\right) |E(J)| \geq \left(1 - \frac{1}{\chi(H) - 1} + 18\delta\right) (1 - \delta)\frac{n^2 p}{2}. \tag{3}$$

Para completar a prova, precisamos mostrar que G possui uma cópia de H.

Como $G \subset J$, temos que G é (μ, p)-uniforme superior Podemos então aplicar o Lema 13 no grafo G com ε e m que fixamos. Desta forma, existe uma partição (ε, G, p)-regular $V_0, V_1, \ldots, V_k$ de $V(G)$, para $m \leq k \leq M$. Para concluir o resultado, mostraremos que $V_1, \ldots, V_k$ contém um grafo de $\mathcal{G}(H, |V_1|, \delta|V_1|p, \varepsilon_\delta)$, pois sabemos que J não contém um grafo de $\mathcal{F}(H, |V_1|, \delta|V_1|p, \varepsilon_\delta)$, uma vez que $|V_1| \geq (1-\varepsilon)n/M \geq \mu n$. Mas assim, fica provado que G contém um grafo de $\mathcal{G}(H, |V_1|, \delta|V_1|p, \varepsilon_\delta) \setminus \mathcal{F}(H, |V_1|, \delta|V_1|p, \varepsilon_\delta)$ como subgrafo e, portanto, contém um subgrafo isomorfo a H.

Vamos gerar um grafo G' obtido da remoção de algumas arestas de G. Considerando a partição $V_0, V_1, \ldots, V_k$ de G, existem no máximo

- $\varepsilon(1+\delta)n^2p$ arestas entre *pares* (V_i, V_j) *que não são* (ε, p)*-regulares*, para $1 \leq i < j \leq k$, pois existem no máximo εk^2 destes pares e, como G é (μ, p)-uniforme superior, existem no máximo $(1+\mu)(n/k)^2p \leq (1+\delta)(n/k)^2p$ arestas entre cada par, uma vez que $|V_i| \leq n/k$.
- $\delta n^2p/2$ arestas entre *pares* (V_i, V_j) *com menos que* $\delta(n/k)^2p$ *arestas*, para $1 \leq i < j \leq k$, pois existem no máximo $k^2/2$ pares.
- $\varepsilon(1+\delta)n^2p$ arestas *dentro das classes* V_i, com $1 \leq i \leq k$. De fato, suponha, por contradição, que exista uma destas classes V_i com $e(V_i) > (1+\mu)(n/k)^2p$. Assim, sabemos que existe um corte de arestas com pelo menos $e(V_i)/2$ arestas. Portanto, existe um outro corte de arestas que particiona V_i em dois conjuntos A e B de mesmo tamanho ($|V_i|/2$) que tem pelo menos $e(V_i)/4$ arestas, isto é, $e(A, B) > (1+\mu)(n/k)^2p/4$. Mas observe que $|V_i|/2 \geq (1-\varepsilon)n/2M \geq \mu n$. Assim, como G é (μ, p)-uniforme superior, $e(A, B) \leq (1+\mu)|A||B|p \leq (1+\mu)(n/k)^2p/4$, uma contradição. Sabendo que toda classe V_i com $1 \leq i \leq k$ é tal que $e(V_i) \leq (1+\mu)(n/k)^2p \leq (1+\delta)(n/k)^2p$ e $k \geq m \geq 1/\varepsilon$, concluímos que existem no máximo $\varepsilon(1+\delta)n^2p$ arestas dentro destas classes.
- $\varepsilon(1+\delta)n^2p$ com pelo menos uma ponta em V_0. Considere um conjunto de vértices W_0 com $|W_0| = \mu n$ tal que $V_0 \subset W_0$ e $2\mu n \leq |W_0| \leq \varepsilon n$ (claramente, tal conjunto existe, uma vez que $|V_0| \leq \varepsilon n$. Como $|W_0| \geq \mu n$ e G é (μ, p)-uniforme superior, sabemos que $e(W_0, V(G) \setminus V_0) \leq (1+\mu)|W_0||V(G) \setminus W_0|p$. Resta saber quantas arestas existem dentro de $|W_0|$. Suponha, por contradição, que $e(W_0) > (1+\mu)|W_0|^2p$. Pelo mesmo argumento dado anteriormente, obtemos uma partição A, B de W_0 com A e B tendo mesmo tamanho ($|W_0|/2$), onde $e(A, B) > (1+\mu)|W_0|^2p/4$. Mas como $|W_0|/2 \geq \mu n$ e G é (μ, p)-uniforme superior, temos que $e(A, B) \leq (1+\mu)|W_0|^2p/4$, uma contradição. Portanto, concluímos que $e(W_0) \leq (1+\mu)|W_0|^2p$. Desta forma, se m é a quantidade de arestas com pelo menos uma

ponta em V_0, como $V_0 \subset W_0$, temos

$$\begin{aligned}
m &\le e(W_0) + e(W_0, V(G) \setminus W_0) \\
&\le (1+\mu)|W_0|p(|W_0| + |V(G) \setminus W_0|) \\
&\le \lceil \varepsilon n \rceil (1+\mu) np \\
&\le \varepsilon(1+\delta) n^2 p,
\end{aligned}$$

where the last inequality follows since n be sufficiently large and $\mu \le \delta/2$.

Assim, se estas são as arestas removidas para formar G', temos que G' é um subgrafo de G onde foram removidas no máximo $3\varepsilon(1+\delta)n^2p + \delta n^2 p/2$.

Seja R o grafo com conjunto de vértices $[k]$ onde o vértice i representa a classe V_i, para $1 \le i \le k$. Uma aresta $\{i, j\}$ existe em R se e somente se o grafo bipartido dado pelo par (V_i, V_j) é um par (ε, p)-regular e existem pelo menos $\delta |V_1|^2 p$ arestas entre V_i e V_j.

Como G é um grafo (μ, p)-uniforme superior e $|V_i| \ge \mu n$, então cada aresta de R representa no máximo $(1+\mu)(n/k)^2 p \le (1+\delta)(n/k)^2 p \le (n/k)^2 p/(1-\delta)$ arestas de G. Assim,

$$\begin{aligned}
e(R) &\ge \frac{e(G')}{(n/k)^2 p/(1-\delta)} \\
&\ge \frac{e(G) - (3\varepsilon(1+\delta)n^2 p + \delta n^2 p/2)}{(n/k)^2 p/(1-\delta)} \\
&\ge \frac{e(G) - 7\delta n^2 p}{(n/k)^2 p/(1-\delta)} \\
&\ge \frac{\left(1 - \frac{1}{\chi(H)-1} + 18\delta\right)(1-\delta)\frac{n^2 p}{2} - 7\delta n^2 p}{(n/k)^2 p/(1-\delta)} \\
&\ge \left(1 - \frac{1}{\chi(H)-1} + 18\delta\right)(1-2\delta)\frac{k^2}{2} - 7\delta k^2 \\
&> \left(1 - \frac{1}{\chi(H)-1} + \delta\right)\frac{k^2}{2} \\
&\ge \mathrm{ex}(k, H).
\end{aligned}$$

A primeira desigualdade segue do fato de cada aresta de R representar no máximo $(n/k)^2 p/(1-\delta)$ arestas de G. Na segunda desigualdade simplesmente observamos a quantidade de arestas que foram removidas de G para formar G'. Para verificar a terceira desigualdade basta notar que $\varepsilon \le \delta$. A quarta desigualdade segue da desigualdade (3). Para a quinta desigualdade, note que $(1-\delta)^2 \ge 1 - 2\delta$. A penúltima desigualdade é consequência de $\delta < 1/34$ e a última segue da escolha de m. Desta forma, como $e(R) > \text{ex}(k, H)$, podemos concluir que R contém uma cópia de H, que chamaremos de H_R.

Precisamos concluir que existe algum subgrafo de G pertencente a $\mathcal{G}(H, |V_1|, \delta|V_1|^2 p, \varepsilon_\delta)$. Observe que, pela definição de R, cada aresta de H_R corresponde a um par (ε, p)-regular (V_i, V_j) com pelo menos $\delta|V_1|^2 p$ arestas. Portanto, é fácil ver (basta comparar as definições) que tal par (V_i, V_j) é (ε/δ)-regular. Assim, pela escolha de ε, sabemos que $\varepsilon/\delta \leq 1/6$. Portanto, podemos aplicar o Lema 24 em cada par (V_i, V_j) correspondente a uma aresta de H_R, obtendo pares $(2\varepsilon/\delta)$-regulares com exatamente $\delta|V_1|^2 p$ arestas. Mas, como $2\varepsilon/\delta \leq \varepsilon_\delta$, esses pares são (ε_δ)-regulares. Assim, juntando estes pares, obtemos um grafo (contido em G) que pertence a $\mathcal{G}(H, |V_1|, \delta|V_1|^2 p, \varepsilon_\delta)$.

□

Referências

[1] F. R. K. Chung, R. L. Graham, and R. M. Wilson, *Quasirandom graphs*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **85** (1988), no. 4, 969–970.

[2] P. Erdős and M. Simonovits, *A limit theorem in graph theory*, Studia Sci. Math. Hungar **1** (1966), 51–57.

[3] S. Gerke and A. Steger, *The sparse regularity lemma and its applications*, Surveys in combinatorics 2005, London Math. Soc. Lecture Note Ser., vol. 327, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2005, pp. 227–258.

[4] Y. Kohayakawa, *Szemerédi's regularity lemma for sparse graphs*, Foundations of computational mathematics (Rio de Janeiro, 1997), Springer, Berlin, 1997, pp. 216–230.

[5] Y. Kohayakawa, T. Łuczak, and V. Rödl, *On K^4-free subgraphs of random graphs*, Combinatorica **17** (1997), no. 2, 173–213.

[6] Y. Kohayakawa and V. Rödl, *Szemerédi's regularity lemma and quasi-randomness*, Recent advances in algorithms and combinatorics, CMS Books Math./Ouvrages Math. SMC, vol. 11, Springer, New York, 2003, pp. 289–351.

[7] J. Komlós and M. Simonovits, *Szemerédi's regularity lemma and its applications in graph theory*, Combinatorics, Paul Erdős is eighty, Vol. 2 (Keszthely, 1993), Bolyai Soc. Math. Stud., vol. 2, János Bolyai Math. Soc., Budapest, 1996, pp. 295–352.

[8] I. Z. Ruzsa and E. Szemerédi, *Triple systems with no six points carrying three triangles*, Combinatorics (Proc. Fifth Hungarian Colloq., Keszthely, 1976), Vol. II, Colloq. Math. Soc. János Bolyai, vol. 18, North-Holland, Amsterdam, 1978, pp. 939–945.

[9] M. Schacht, *Extremal results for random discrete structures*, 2010.

[10] E. Szemerédi, *Regular partitions of graphs*, Problèmes combinatoires et théorie des graphes (Colloq. Internat. CNRS, Univ. Orsay, Orsay, 1976), Colloq. Internat. CNRS, vol. 260, CNRS, Paris, 1978, pp. 399–401.

[11] P. Turán, *On an extremal problem in graph theory*, Matematikai és Fizikai Lapok **48** (1941), 436–452.