

PRELIMINAR

- $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ AS VEZES CONSIDERAMOS O ZERO
- $[n] = \{1, \dots, n\}$
- DADO CONJUNTO S , $|S|$ DENOTA O NÚMERO DE ELEMENTOS EM S
- DADO INTEIRO $k \leq |S|$, $\binom{S}{k}$ DENOTA O CONJUNTO DE SUBCONJUNTOS DE S COM TAMANHO k

$$\leadsto \text{TENOS } \left| \binom{S}{k} \right| = \binom{|S|}{k} = \frac{|S|!}{k!(|S|-k)!}$$

OBS: USAREMOS $\binom{[n]}{2}$ PARA DENOTAR AS ARESTAS DE UM GRAFO COMPLETO COM VÉRTICES $[n]$.

Prop 1: $k! \geq \left(\frac{k}{e}\right)^k$

Desigualdade de Bernoulli:

Prop: se $x \in \mathbb{R}$, $x > -1$ e $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 0$,
então $(1+x)^m \geq 1+mx$

Prova: indução em m

Base: vale p/ $m=0$: $(1+x)^0 = 1 = 1+0x$

Passo Indutivo: $(1+x)^{k+1} = (1+x)^k (1+x)$
 $\geq (1+kx)(1+x)$
 $= 1 + (k+1)x + kx^2$
 $\geq 1 + (k+1)x$ $\square$

Teorema: $e^x \geq 1+x$

Prova: $e^x = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \geq \lim_{n \rightarrow \infty} (1+x) = 1+x$ $\square$
Def Bernoulli

Teo 1: $\frac{n^n}{e^{n-1}} \leq n! \leq \frac{n^{n+1}}{e^{n-1}}$

Prova: $e^x \geq 1+x$

Colocando $x = 1/k$, temos $e^{1/k} \geq 1 + 1/k = \frac{k+1}{k}$ (1)

Considere o seguinte produto

$$\prod_{k=1}^{n-1} \frac{(k+1)^k}{k^k} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots n^{n-1}}{1 \cdot 2^2 \cdot 3^3 \cdots (n-1)^{n-1}} = \frac{n^{n-1}}{(n-1)!} = \frac{n^n}{n!}$$

Além disso, temos

$$e^{n-1} = \prod_{k=1}^{n-1} e = \prod_{k=1}^{n-1} (e^{1/k})^k \stackrel{(1)}{\geq} \prod_{k=1}^{n-1} \left(\frac{k+1}{k}\right)^k = \frac{n^n}{n!}$$

Logo,

$$e^{n-1} \geq \frac{n^n}{n!} \Rightarrow n! \geq \frac{n^n}{e^{n-1}} = e \left(\frac{n}{e}\right)^n > \left(\frac{n}{e}\right)^n \quad \square$$

Com $x = -1/(k+1)$, temos $e^{-1/(k+1)} \geq 1 - \frac{1}{k+1} = \frac{k}{k+1}$ (2)

Além disso,

$$\prod_{k=1}^{n-1} \left(\frac{k}{k+1}\right)^{k+1} = \dots = \frac{n!}{n^{n+1}} \Rightarrow n! \leq \frac{n^{n+1}}{e^{n-1}} \quad \square$$

PROP: $\left(\frac{m}{k}\right)^k \underset{(2)}{\leq} \binom{m}{k} \underset{(1)}{\leq} \left(\frac{em}{k}\right)^k$

PROVA: $\binom{m}{k} = \frac{m!}{k!(m-k)!} = \frac{m \cdots (m-k+1)}{k!}$

Pelo Teo 1, TEMOS $\frac{k^k}{e^{k-1}} \leq k! \leq \frac{k^{k+1}}{e^{k-1}}$

Logo,

$$(1) \quad \frac{m \cdots (m-k+1)}{k!} \leq \frac{m \cdots (m-k+1) \cdot e^{k-1}}{k^k} < \left(\frac{em}{k}\right)^k$$

$$(2) \quad \binom{m}{k} = \frac{m!}{k!(m-k)!} = \frac{m \cdots (m-k+1)}{k!} = \prod_{i=0}^{k-1} \frac{m-i}{k-i} \geq \prod_{i=0}^{k-1} \frac{m}{k} = \left(\frac{m}{k}\right)^k$$

Pois $\frac{a-i}{b-i} \geq \frac{a}{b} \iff ab-bi \geq ab-ai \iff a \geq b$

Assintótico

• Dadas duas seqüências $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ de números positivos dizemos

$$a_n = O(b_n)$$

se existe constante C tal que $|a_n| \leq C|b_n|$
para todo n suficientemente grande.



maior do que algum n_0

dizemos $a_n = o(b_n)$, ou $a_n \ll b_n$ se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$$

GRAFOS

- Um grafo G é um par (V, E) , onde V é um conjunto de elementos e $E \subseteq \binom{V}{2}$ é o conjunto das arestas.
- Usamos $|G|$ no lugar de $|V|$ p/ o número de vértices e $e(G)$ p/ o número de arestas.

- $u, w \in V$ são adjacentes se $uw \in E$

$\Rightarrow$ escrevemos $u \sim v$

- G é completo se $u \sim v \forall u, v \in V, u \neq v$, ou seja, se $E = \binom{V}{2}$

$\Rightarrow$ o grafo completo com $V = [n]$ é denotado por K_n

- Um caminho é uma sequência de vértices distintos

$$(v_0, \dots, v_k)$$

$$\text{t.q. } v_{i-1} \sim v_i \quad \forall i \in [k].$$

- Se $v_0 = v_k$, temos um circuito

- Um grafo é conexo se para quaisquer dois vértices distintos u e w , existe caminho $(v_0, \dots, v_k)$ em G t.q. $v_0 = u$ e $v_k = w$

- Uma árvore é um grafo conexo sem circuitos.

- Um grafo é bipartido se não possui circuito de comprimento ímpar.

$\Rightarrow G$ é bipartido se e somente se existe $A \subseteq V$ t.q.
 $\forall uw \in E$ temos $u \in A$ e $w \notin A$

• Um **SUBGRAFO** DE G É UM GRAFO $G' = (V', E')$

$$V' \subseteq V \quad \text{e} \quad E' \subseteq E \cap \binom{V'}{2}$$

• Um subgrafo (V', E') É **INDUZIDO** SE $E' = E \cap \binom{V'}{2}$
~ DENOTAMOS POR $G[V']$

• Para $A, B \subseteq V$ DISJUNTOS, ESCRIVEMOS $G[A, B]$ O

SUBGRAFO BIPARTIDO INDUZIDO COM VÉRTICES $A \cup B$ QUE
POSSUI TODAS AS ARESTAS $ab \in E$ T.q. $a \in A$ e $b \in B$.

• $S \subseteq V$ É UM **K-CLIQUE** SE $|S| = K$ E $G[S]$ É COMPLETO

• $S \subseteq V$ É **INDEPENDENTE** SE $G[S]$ NÃO POSSUI ARESTAS

PROBABILIDADE

- UM ESPAÇO DE PROBABILIDADE FINITO $\bar{\Omega}$ É DEFINIDO POR UM CONJUNTO FINITO Ω CHAMADO ESPAÇO DE ESTADOS E UMA FUNÇÃO

$$P: \Omega \rightarrow [0, 1]$$

QUE ATRIBUI UMA PROBABILIDADE $P(\omega)$ P/ CADA $\omega \in \Omega$

- SUBCONJUNTOS $E \subseteq \Omega$ SÃO CHAMADOS EVENTOS.

→ ESCRITAMOS
$$P(E) = \sum_{\omega \in E} P(\omega)$$

- SE $E_1, E_2 \subseteq \Omega$, TEMOS

$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2) \leq P(E_1) + P(E_2)$$

- UMA FUNÇÃO $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ É UMA VARIÁVEL ALEATÓRIA

- O VALOR ESPERADO DE X É DADO POR
OU ESPERANÇA

$$E(X) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \cdot P(\omega)$$

- A VARIÂNCIA DE X É

$$\text{Var}(X) = E[(X - E(X))^2] = E(X^2) - E(X)^2$$

$$\Rightarrow E(X)^2 \leq E(X^2)$$

• VAMOS USAR EXPRESSÕES COMO $\{X > t\}$ E $\{X = x\}$

PARA DENOTAR OS **EVENTOS**

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) > t\} \text{ E } \{\omega \in \Omega : X(\omega) = x\}$$

• UMA SEQ. DE EVENTOS $E_1, \dots, E_m \subseteq \Omega$ É DITO **INDEPENDENTE** SE

PARA TODO $\emptyset \neq A \subseteq [m]$ TEMOS

EX. MOEDAS...

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in A} E_i\right) = \prod_{i \in A} \mathbb{P}(E_i)$$

• UMA SEQ. DE VARIÁVEIS ALEATÓRIAS $X_1, \dots, X_m$ É **INDEPENDENTE** SE

PARA TODAS $x_1, \dots, x_m \in \mathbb{R}$ OS EVENTOS

$$\{X_1 = x_1\}, \dots, \{X_m = x_m\} \text{ SÃO INDEPENDENTES}$$

$$\Rightarrow \text{Var}\left(\sum_{i=1}^m X_i\right) = \sum_{i=1}^m \text{Var}(X_i)$$

TEO: SE X E Y SÃO VARIÁVEIS ALEATÓRIAS INDEPENDENTES, ENTÃO

$$\text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y)$$

PROVA: $\text{Var}(X + Y) = \mathbb{E}[(X + Y)^2] - \mathbb{E}[X + Y]^2 = \mathbb{E}[X^2 + 2XY + Y^2] - (\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y))^2$

$$= \mathbb{E}(X^2) + \cancel{2\mathbb{E}(X) \cdot \mathbb{E}(Y)} + \mathbb{E}(Y^2) - \mathbb{E}(X)^2 - \cancel{2\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)} - \mathbb{E}(Y)^2$$
$$= \text{Var}(X) + \text{Var}(Y)$$

Teo: SEJAM X E Y DUAS VARIÁVEIS INDEPENDENTES, ENTÃO

$$E(XY) = E(X)E(Y)$$

Prova: $E(X) = \sum_{w \in \Omega} X(w) \cdot P(w) = \sum_{z \in \mathbb{R}} z \cdot P(X=z)$

ANALOGAMENTE,

$$E(Y) = \sum_{z \in \mathbb{R}} z \cdot P(Y=z)$$

€

$$E(XY) = \sum_{z \in \mathbb{R}} z \cdot P(X \cdot Y = z)$$

$$= \sum_{x,y} x \cdot y \cdot P(X=x \wedge Y=y)$$

$$= \sum_{x,y} x \cdot y \cdot P(X=x) \cdot P(Y=y)$$

$$= \sum_{x,y} x \cdot P(X=x) \cdot y \cdot P(Y=y)$$

$$= \sum_x x \cdot P(X=x) \cdot \sum_y y \cdot P(Y=y)$$

$$= E(X) \cdot E(Y)$$

TEORIA DE RAMSEY

• RESOLVER EQUAÇÕES

EX: $x^2 - ny^2 = \pm 1$ (eq. de Pell)

EX: $x^m + y^m = z^m$, $m \geq 3$ (Teo. de Fermat)

• VAMOS RESOLVER EQUAÇÕES EM SUBCONJUNTOS DE INTEIROS

Prob: Qual a maior DENSIDADE de um conjunto $A \subseteq \mathbb{N}$ que NÃO POSSUI solução para a eq.

$$x + y = z \quad (\text{livres de soma})$$

EX: O CONJUNTO DOS ÍMPARES TEM DENSIDADE $1/2$.

• PODEMOS FAZER MELHOR?

~ NÃO!

Prova: Sejam $A_m = A \cap [m]$ e $m - A_m = \{m - a : a \in A_m\}$

se $A_m \cap m - A_m \neq \emptyset$, ENTÃO há $a, b \in A$ t.q.
 $a \in A$, $m - b \in m - A_m$ e $a = m - b$.

Assim, se $m \in A_m$, TEMOS QUE $A_m \cap m - A_m = \emptyset$.

Como $|A_m| = |m - A_m|$, TEMOS $|A_m| \leq m/2$.

PERG. Qual a DENSIDADE MÁXIMA de $A \subseteq \mathbb{N}$ QUE NÃO POSSUI soluções para a eq. $x + y = 2z$?

TEOREMA DE RAMSEY

- SUPONHA QUE COLORIMOS OS INTEIROS COM r CORES. EXISTE SOLUÇÃO MONOCROMÁTICA DA eq. $x+y=z$?

DEF: UMA "COLORAÇÃO" DE S É UMA FUNÇÃO $c: S \rightarrow [r]$

$\{1, \dots, r\}$ SÃO AS CORES

- DIZEMOS QUE " s É DA COR i " SE $c(s) = i$.
- UM CONJUNTO É MONOCROMÁTICO SE TODOS SEUS ELEMENTOS SÃO DA MESMA COR.

PRINCÍPIO DA CASA DOS POMBOIS: (PCP)

"SE EU TENHO m CASAS E $m+1$ POMBOIS, ENTÃO HÁ UMA CASA COM PELO MENOS DOIS POMBOIS"

PRINCÍPIO DA CASA DOS POMBOIS INFINITO (PCPI)

"SE EU TENHO m CASAS E INFINITOS POMBOIS ENTÃO HÁ UMA CASA COM INFINITOS POMBOIS"

TEOREMA DE RAMSEY: SEJA $r \geq 1$. TODA COLORAÇÃO

$c: \binom{\mathbb{N}}{2} \rightarrow [r]$ CONTÉM UM SUBCONJUNTO INFINITO $S \subseteq \mathbb{N}$

T.Q. $\binom{S}{2}$ É MONOCROMÁTICO.

ALT: TODA r -COLORAÇÃO DO GRÁFO INFINITO COMPLETO POSSUI UMA CLIQUE INFINITA MONOCROMÁTICA.

PROVA: VAMOS CONSTRUIR UMA SEQ. $(X_1, X_2, \dots)$ T.Q.
A COR DE $X_i X_j$ É $\min\{i, j\}$.

SEJA $X_1 = L$ E $X_1 = IN$. PELO PCPI HA' UMA
COR $p(1) \in [r]$ T.Q. $N_{p(1)}(X_1)$ É INFINITA
↳ VIZINHANÇA POR ARESTAS
DE COR $p(1)$

SEJA $X_2 = N_{p(1)}(X_1)$ E $X_2 \in X_2$.

ANALOGAMENTE, DEFINIMOS $p(2) \in [r]$ A COR NO
QUAL

$X_3 = N_{p(2)}(X_2) \cap X_2$ É INFINITO

ISSO NOS DÁ SEQUÊNCIAS $X_1, X_2, \dots$

E $X_1 \supseteq X_2 \supseteq X_3 \supseteq \dots$

NOTE QUE TODA ARESTA $X_1 X_j$ É COLORIDA
COM $p(1)$, E TODA ARESTA $X_2 X_j$, $j > 2$ É COL.
COM $p(2), \dots$

TAMOS A SEQUÊNCIA $P = p(1), p(2), p(3), \dots$
DE ELEMENTOS DE $[r]$.

COMO P É INFINITO, PELO PCPI, ALGUMA COR
APARECE INFINITAS VEZES.

MAS ISSO INDUZ UM SUBCONJUNTO MONOCROMÁTICO INFINITO.

TEOREMA DE RAMSEY FINITO

TEOREMA: DADOS $k, r \in \mathbb{N}$, $r \geq 2$, EXISTE CONSTANTE $R = R(k, r)$ T.q.
TODA r -COLORAÇÃO DE $E(K_R)$ POSSUI UM k -CLIQUE MONO χ .

PROVA: SUPONHA QUE O TEOREMA É FALSO.

ENTÃO PARA TODO $p \in \mathbb{N}$ EXISTE r -COLORAÇÃO DE $E(K_p)$ SEM k -CLIQUE MONO χ .

VAMOS MOSTRAR QUE EXISTE UMA SEQ. $C_1, C_2, \dots$ DE r -COLORAÇÕES SEM k -CLIQUE MONO χ T.q. C_i É r -COLORAÇÃO DE K_i E C_i É A RESTRIÇÃO DE C_{i+1} ÀS ARESTAS DE K_i .

OBS: ESTAMOS CONSIDERANDO QUE $V(K_i) = [i]$.

PARA CADA $p \in \mathbb{N}$ SEJA C_p O CONJUNTO DE r -COLORAÇÕES DE K_p SEM k -CLIQUE MONO χ

NOTE QUE PARA TODA COLORAÇÃO EM C_{p+s} HÁ UMA COLORAÇÃO EM C_p QUE É A SUA RESTRIÇÃO.

SEJA C_{p+s}^P O CONJUNTO DE RESTRIÇÕES DAS COLORAÇÕES DE C_{p+s} A K_p . COMO $C_{p+s} \neq \emptyset$, TEMOS $C_{p+s}^P \neq \emptyset$

NOTE QUE $C_p \supseteq C_{p+1}^P \supseteq C_{p+2}^P \supseteq \dots$

SEJA

$$D_p = C_p \cap C_{p+1}^P \cap C_{p+2}^P \cap \dots$$

TEMOS $D \neq \emptyset$ E ALÉM DISSO SE $C \in D$, C PODE SER SE ESTENDIDA PARA UMA COLORAÇÃO EM C_p , $\forall p$

EM PARTICULAR, PODEMOS CONSTRUIR UMA COLORAÇÃO DE $K_{\mathbb{N}}$ T.q. SUA RESTRIÇÃO A K_p NÃO POSSUI k -CLIQUE MONO χ , O QUE É ABSURDO, POIS $K_{\mathbb{N}}$ POSSUI UM CLIQUE MONO χ INFINITO.

TEOREMA DE SCHUR

DEF: DIZEMOS QUE (x, y, z) É UMA **TRIPLA DE SCHUR** SE

$$x + y = z$$

TEOREMA: TODA COLORAÇÃO $c: \mathbb{N} \rightarrow [r]$ POSSUI UMA TRIPLA DE SCHUR MONOCROMÁTICA. ↗ FINITO, NE?

PROVA: CONSIDERE A COLORAÇÃO $c': \binom{\mathbb{N}}{2} \rightarrow [r]$ DADO POR

$$c'(ab) = c(|a-b|)$$

Pelo TEOREMA DE RAMSEY, $G = (\mathbb{N}, \binom{\mathbb{N}}{2})$ COLORIDO COM c' POSSUI UM TRIÂNGULO MONOCROMÁTICO, DIGAMOS xyz , COM $x \leq y \leq z$

$$\text{TEMOS } c'(xy) = c'(yz) = c'(zx)$$

$$\text{O SEJA } c(\underbrace{y-x}_a) = c(\underbrace{z-y}_b) = c(\underbrace{z-x}_c)$$

$$\text{i.e. } c(a) = c(b) = c(c).$$

$$\text{PORÉM } a + b = \cancel{y-x} + \cancel{z-y} = z - y = c$$

LOGO (a, b, c) É UMA TRIPLA DE SCHUR $\square$

OBS: A VERSÃO FINITA DO TEOR DE RAMSEY IMPLICA NA VERSÃO FINITA DO TEOREMA DE SCHUR

TEOREMA (SCHUR FINITO): EXISTE $m \in \mathbb{N}$ T.q. TODA COLORAÇÃO $c: [m] \rightarrow [r]$ POSSUI UMA TRIPLA DE SCHUR MONOCROMÁTICA.

PROVA: TOME $m = R(3, r)$

COROLÁRIO: PARA TODO $m \in \mathbb{N}$, A EQUAÇÃO

$$x^m + y^m = z^m \pmod{p}$$

TEM UMA SOLUÇÃO NÃO TRIVIAL PARA p **SUFICIENTEMENTE GRANDE**

PROVA: CONSIDERE O SUBGRUPO

$$H_m = \{x^m : x \in \mathbb{Z}_p^*\} \leq \mathbb{Z}_p^*$$

E PARTIÇÃOE $\mathbb{Z}_p$ EM CLASSES LATERAIS

$$\mathbb{Z}_p^* = a_1 H_m \cup \dots \cup a_r H_m$$

AFIRMAMOS QUE $r \leq m$.

DE FATO, O POLINÔMIO $x^m = a$ POSSUI NO MÁXIMO m RAÍZES. LOGO NO MÁXIMO m ELEMENTOS DE $\mathbb{Z}_p^*$ PODERAM SER Mapeados EM CADA ELEMENTO DE H_m . ASSIM, TEMOS

Além disso $|H_m| = |a; H_m|$, e portanto $p = r \cdot |H_m|$.
Isso implica que $\frac{p}{r} = |H_m| \geq \frac{p}{m} \Rightarrow m \geq r$.

Assim, temos uma r -coloração de $\{1, \dots, p-1\}$.

^{→ finito}
PELO TEOREMA DE SCHUR, SE p É SUFICIENTEMENTE GRANDE, EXISTE UMA TRIPLA DE SCHUR MONOCROMÁTICA.

OU SEJA, EXISTE a_i T.q. $x', y', z' \in a_i H_m$ E

$$x' + y' = z' \pmod{p}$$

$$\Rightarrow \alpha_i x^m + \alpha_i y^m = \alpha_i z^m \pmod{p}$$



TEOREMA DE RAMSEY FINITO

EX: TODA 2-COLORAÇÃO DE K_6 POSSUI UM TRIÂNGULO MONOC.

PROVA: SEJA $v \in K_6$. $d(v) = 5$, logo há uma cor i T.q.
 $d_i(v) \geq 3$.

SEJAM x, y, z OS i -VIZINHOS DE v .

SE HÁ i -ARESTA ENTRE xy , ENTÃO vxy É UM i -TRIÂNGULO.
ENTÃO xy É j -ARESTA, COM $i \neq j$.
ANALOGAMENTE, xz E yz SÃO j -ARESTAS.

LOGO xyz É UM j -TRIÂNGULO

TEOREMA (ERDŐS - SZÉKERES, 1935; ERDŐS, 1947):

$$(\sqrt{2})^k \ll R(k) \ll 4^k$$

PROVA: DADOS m, n , DEFINIMOS POR $R(m, n)$ O MENOR INTEIRO p T.q.
TODA 2-COLORAÇÃO DE $E(K_p)$ POSSUI m -CLIQUE AZUL OU n -CLIQUE VERMELHA

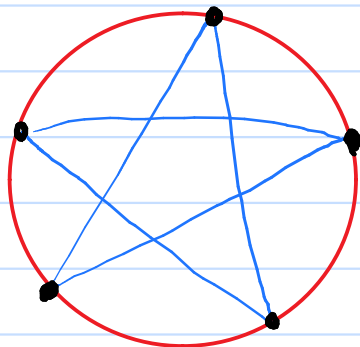
TEORIA DE RANSEY

~ NÃO PRECISA SER PRÓPRIA

SEJA $G = K_n$ E CONSIDERE UMA 2-COLORAÇÃO DAS ARESTAS DE G .

GOSTARÍAMOS DE SABER SE G POSSUI UMA CÓPIA MONOCROMÁTICA DE K_m

EX: EXISTE 2-COLORAÇÃO DE K_5 SEM TRIÂNGULO MONOCROMÁTICO



EX: K_6 NÃO ADMITE 2-COLORAÇÃO SEM TRIÂNGULO MONOCROMÁTICO

PROVA: SEJA $c: E(G) \rightarrow \{0,1\}$ UMA 2-COLORAÇÃO DE G .

NOTAR QUE TODO VÉRTICE TEM GRAU 5.

ENTÃO SE $v \in V(G)$ ENTÃO v POSSUI TRÊS ARESTAS COM A MESMA COR, DIGAMOS 0.

SEJAM a, b, c TRÊS VIZINHOS DE v T.q. $c(va) = c(vb) = c(vc) = 0$.

SE $c(ab) = c(bc) = c(ac) = 1$, ENTÃO abc É TRIÂNGULO MONOCROMÁTICO.

LOGO Pelo MENOS UMA ARESTA EM $\{ab, bc, ac\}$ TEM COR 0, DIGAMOS ab .

$\Rightarrow vab$ É TRIÂNGULO MONOCROMÁTICO. □

DEF: DENOTAMOS POR $R(r,s)$ O MENOR n T.q. TODA 2-COLORAÇÃO DE K_n POSSUI OU UMA CÓPIA DE K_r DA COR 0, OU UMA CÓPIA DE K_s DA COR 1.

PROP: $R(3,3) = 6$

PERGUNTA: $R(r,s)$ ESTÁ BEM DEFINIDA? I.E. EXISTE INTEIRO m T.q. $R(r,s) \leq m$, OU EXISTEM $r,s \in \mathbb{N}$ T.q. $\forall m$ EXISTE 2-COLORAÇÃO DE K_m SEM K_r 0-COLORADO E K_s 1-COLORADO?

TEOREMA: $R(r,s) \leq R(r-1,s) + R(r,s-1)$

PROVA: INDUÇÃO EM $r+s$.

SUPONHA QUE O ENUNCIADO NÃO VALE E SEJAM $r,s \in \mathbb{N}$ QUE CONTRADIZEM O ENUNCIADO E QUE MINIMIZA $r+s$.

NOTE QUE $R(1,m) = R(m,1) = 1$

LOGO $r,s \geq 2$.

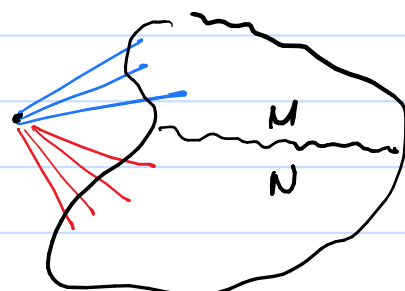
SEJA $m = R(r-1,s) + R(r,s-1)$ E SEJA $G = K_m$ EXISTEM, PELA MINIMALIDADE DE $r+s$

VAMOS MOSTRAR QUE QUALQUER 2-COLORAÇÃO DE K_m POSSUI UMA 0-CÓPIA DE K_r OU UMA 1-CÓPIA DE K_s

obs. i-CÓPIA = CÓPIA DA COR i

FIXE UM VÉRTICE $v \in V(G)$ E PARTICIONE $V(G) - v$ EM DOIS CONJUNTOS M E N T.q.

$$C(vw) = \begin{cases} 0 & \text{SE } w \in M \\ 1 & \text{SE } w \in N \end{cases}$$



NOTE QUE $R(r-1,s) + R(r,s-1) = |M| + |N| + 1$

ENTÃO TEMOS $|M| \geq R(r-1,s)$ OU $|N| \geq R(r,s-1)$

SUPONHA $|M| \geq R(r-1,s)$.

SE M POSSUI 1-CÓPIA DE K_s . ✓

SENÃO M POSSUI 0-CÓPIA DE K_{r-1} , DIGAMOS H .

$\Rightarrow H+v$ É 0-CÓPIA DE K_r . ✓

DEF: DENOTAMOS POR $R(r,s)$ O MENOR n T.Q. TODA 2-COLORAÇÃO DE K_n POSSUI OU UMA CÓPIA DE K_r DA COR 0, OU UMA CÓPIA DE K_s DA COR 1.

DEF: DENOTAMOS POR $R(m_1, \dots, m_c)$ O MENOR n T.Q. PARA TODA c -COLORAÇÃO EXISTE $i \in \{1, \dots, c\}$ T.Q. K_n POSSUI i -CÓPIA DE K_{m_i} .

TEOREMA: SE $c \geq 2$, ENTÃO $R(m_1, \dots, m_c) \leq R(m_1, \dots, m_{c-2}, R(m_{c-1}, m_c))$

PROVA: INDUÇÃO NO NÚMERO DE CORES.

A IDEIA É VER DUAS CORES COMO UMA SÓ.

$$\text{SEJA } n = R(m_1, \dots, m_{c-2}, R(m_{c-1}, m_c))$$

PELO TEOREMA APLICADO COM $c-1$ CORES,

EXISTE $i \in \{1, \dots, c-1\}$ T.Q. K_n POSSUI i -CÓPIA DE K_{m_i} .

SE $i \leq c-2$, ✓

SE $i = c-1$, G POSSUI $(c-1)$ -CÓPIA H DE $K_{R(m_{c-1}, m_c)}$.

MAS ISSO INDUZ UMA 2-CD. DE H .

$\Rightarrow H$ POSSUI $(c-1)$ -CÓPIA DE $K_{m_{c-1}}$ OU
 c -CÓPIA DE K_{m_c}

✓

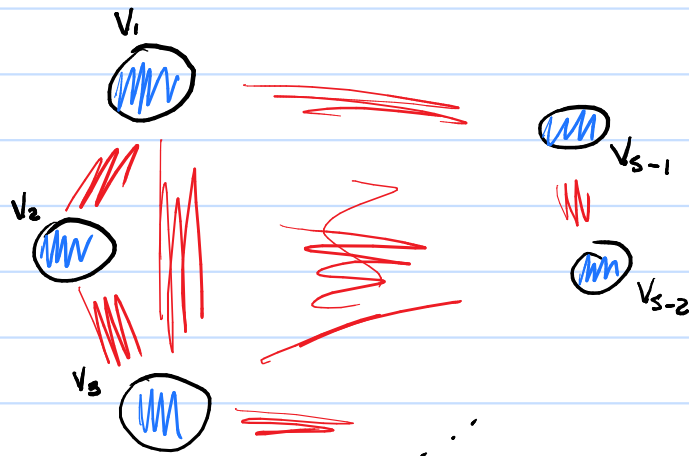
□

$$\text{COROLÁRIO: } R(r,s) \leq \binom{r+s+2}{r-1}$$

$$\text{QUANDO } r=s, R(s,s) \leq (1+o(1)) \frac{4^{s-1}}{\sqrt{\pi s}}$$

LOWER BOUND

CONSIDERE A COLORAÇÃO AO LADO
 SE $|V_i| = r-1$, NÃO HÁ K_r AZUL
 ALÉM DISSO QUALQUER CLIQUE VERMELHO
 TEM NO MÁXIMO UM VÉRTICE EM CADA
 PARTE. LOGO, NÃO HÁ K_s VERMELHO.



$$\text{Logo } R(r, s) > (r-1)(s-1)$$

- CONSIDERE UMA COLORAÇÃO ALEATÓRIA DAS ARESTAS DE K_m COM AZUL E VERMELHO
- FIXE UM CONJUNTO V COM r VÉRTICES.
- A PROBABILIDADE DE $G[V]$ SER UMA CÓPIA MONOCROMÁTICA DE K_r É

$$p = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\binom{r}{2}} = 2^{1 - \binom{r}{2}}$$

- HÁ $\binom{m}{r}$ FORMAS DE ESCOLHER V .
- A PROBABILIDADE DE K_m TER UMA CÓPIA MONOCROMÁTICA DE K_r É NO MÁXIMO

$$\binom{m}{r} 2^{1 - \binom{r}{2}}$$

- SE $\binom{m}{r} 2^{1 - \binom{r}{2}} < 1$, ENTÃO HÁ UMA FORMA DE COLORIR AS ARESTAS DE FORMA A NÃO TER CÓPIA MONOCROMÁTICA DE K_r .

$$\Rightarrow \text{OU SEJA, } R(r, r) > m$$

$$p \leq \binom{m}{r} 2^{1 - \binom{r}{2}} \leq \frac{m^r}{r!} \cdot 2^{1 - \binom{r}{2}}$$

$$\text{TOME } m = 2^{\frac{r-1}{2}}$$

$$p \leq \frac{m^r}{r!} \cdot 2^{1 - \binom{r}{2}} = \frac{2^{\frac{r(r-1)}{2}}}{r!} \cdot 2^{1 - \binom{r}{2}} \leq \frac{2}{r!} < 1$$

$$\binom{m}{r} = \frac{m!}{r!(m-r)!} = \frac{m(m-1) \cdots (m-r+1)}{r!}$$

$$\leq \frac{m^r}{r!}$$

CONSIDERE O CONJUNTO $X = \{1, 2, \dots, 8\}$.

PODEMOS PARTICIONAR X EM DOIS CONJUNTOS QUE NÃO CONTENHAM PROG. ARIT?

1 2 3 4 5 6 7 8

É POSSÍVEL FAZER COM $\{1, \dots, 9\}$?

DEF: DENOTAMOS POR $W(r, k)$ O MENOR INTEIRO n T.Q. PARA QUALQUER r COLORAÇÃO DE $\{1, \dots, n\}$ EXISTE UMA COR QUE CONTEM UMA PROG. ARITMÉTICA COM k NÚMEROS. EM OUTRAS PALAVRAS, TODA r -COLORAÇÃO DE $\{1, \dots, n\}$ POSSUI UMA A.P. **MONOCROMÁTICA** DE **COMPRIMENTO k**

PROP: $W(2, 3) = 9$

TEOREMA (VAN DER WAERDEN): $W(r, k)$ EXISTE $\forall r, k$.

PROVA: TRIVIAL PARA $k \leq 2 \quad \forall r$. FIXE CONTRAEXEMPLO MINIMIZANDO k .
ENTÃO $W(r, k-1)$ EXISTE $\forall r$.

SEJA $AP(a, d, k)$ A PROG. ARIT. $\{a, a+d, a+2d, \dots, a+(k-1)d\}$

FIXE $l \in \mathbb{N}$

SEJA $A_1, \dots, A_t$ UMA SEQUÊNCIA DE P.A., ONDE $A_i = (a_i, d_i, l)$.

DIZEMOS QUE $A_1, \dots, A_t$ SÃO **FOCADAS EM z** SE

$$a_i + ld_i = a_j + ld_j = z \quad \forall i, j \in \{1, \dots, t\}$$

DIZEMOS QUE $A_1, \dots, A_t$ SÃO **FOCO-COLORIDAS** SE ALÉM DISSO, ELAS SÃO MONOCROMÁTICAS E DE CORES DIFERENTES.

AFIRMAÇÃO: $\forall k, r \in \mathbb{N}$, SE $s \leq r$, EXISTE n T.Q. $\{1, \dots, n\}$ É r -COLORIDA, EXISTE OU UMA A.P. MONOCROMÁTICA DE COMP. k OU s A.P.'S FOCO-COLORIDAS DE COMP. $k-1$.

PROVA DA AFIRMAÇÃO:

1) Se $s=1$, TOMAMOS $m=W(r, k-1)$ (EXISTE PELA MINIMALIDADE DE $r+s$)
TODA r -COLORAÇÃO DE $\{1, \dots, m\}$ POSSUI UMA A.P. MONOCROMÁTICA DE
COMP. $k-1$, OU SEJA 1 FOCO-COLORIDA A.P. DE COMP. $k-1$.

2) SUPONHA $s>1$ E QUE A AFIRMAÇÃO VALE PARA $s-1$ COM m .
VAMOS MOSTRAR QUE VALE PARA s COM $N=2mW(r^{2m}, k-1)$
PARTICIONE $\{1, \dots, N\}$ EM BLOCOS DE COMP. $2m$.
CADA BLOCO POSSUI OU UMA A.P. MONOCROMÁTICA DE COMP. k (E AÍ
ESTAMOS RESOLVIDOS) OU $s-1$ A.P.'s FOCO-COLORIDAS DE COMP. $k-1$.

3) NOTE QUE TEMOS $W(r^{2m}, k-1)$ BLOCOS DE COMP. $2m$.
VAMOS COLORIR OS BLOCOS COM VETORES EM $[r]^{2m}$
SEJA $B=\{b_1, \dots, b_{2m}\}$, A COR DE B É $c(B)=(c(b_1), \dots, c(b_{2m}))$.
COMO $c(b_i) \in \{1, \dots, r\}$, HÁ r^{2m} CORES POSSÍVEIS PARA B .

Pela DEF DE N , HÁ UMA A.P. $B_x, B_{x+y}, B_{x+2y}, \dots, B_{x+(k-2)y}$
DE BLOCOS COM A MESMA COR.

4) SEJA $A_j = AP(a_j, d_j, k-1)$ $1 \leq j \leq s-1$ EM B_x COM FOCO z .
DEFINA

$$A'_j = AP(a_j, d_j + 2my, k-1) \quad 1 \leq j \leq s-1$$

=

$$A' = AP(z, 2ym, k-1)$$

DADO $i \neq j$, TEMOS QUE $a_j + (k-1)d_j = a_i + (k-1)d_i = z$
PORQUE A_j 'S SÃO FOCO-COLORIDAS

Logo

$$\begin{aligned} a_j + (k-1)(d_j + 2my) &= a_j + (k-1)d_j + (k-1)2my \\ &= a_i + (k-1)d_i + (k-1)2my \\ &= z + (k-1)2my \end{aligned}$$

QUE É TAMBÉM O FOCO DE A' .

PERGUNTA: Qual o maior número de arestas que podemos ter em um grafo sem triângulos?

Qual o grafo que maximiza esse número de arestas?

TEOREMA DE MANTEL (1907): Seja G um grafo com n vértices e m arestas. Se $m > \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \lceil \frac{n}{2} \rceil$, então G possui um triângulo.

PROVA: Dado um grafo G sem triângulos, vamos construir um grafo G' bipartido completo t.q.

$$V(G') = V(G) \quad \text{e} \quad |E(G')| \geq |E(G)|$$

Seja v um vértice de grau máximo em G .

Seja S a vizinhança de v . Note que $G[S]$ não possui arestas porque G não possui triângulos.

Logo, se $w \in S$, então $d_G(w) \leq |V \setminus S|$

Seja G' o grafo $(S, V \setminus S)$ -bipartido completo.

Como v tem grau máximo em G , temos

$$\forall w \in V \setminus S \quad d_{G'}(w) = |S| = \Delta(G) \geq d_G(w)$$

Além disso, se $w \in S$, temos

$$d_{G'}(w) = |V \setminus S| \geq d_G(w)$$

Logo, temos $d_{G'}(w) \geq d_G(w) \quad \forall w \in V$, e portanto $|E(G')| \geq |E(G)|$.

O que implica que $|E(G)| \leq |S| \cdot |V \setminus S| \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \lceil \frac{n}{2} \rceil$

PROVA 2: SUPONHA QUE O TEOREMA VALE ? / $m' \leq m$.

i.e.: SE G' TEM m' VÉRTICES, ENTÃO

$$|E(G')| \leq \left\lceil \frac{m'}{2} \right\rceil \left\lfloor \frac{m'}{2} \right\rfloor.$$

SEJA G UM GRAFO COM n VÉRTICES

SEJA $uv \in E(G)$

COMO G NÃO POSSUI TRIÂNGULOS, HÁ NO MÁXIMO $n-1$ ARESTAS INCIDENTES A $u \in v$.

SEJA $G' = G - u - v$. TEMOS $m' = |V(G')| = |V(G)| - 2$
 $< |V(G)| = n$

COMO $G' \in G$, G' NÃO POSSUI TRIÂNGULOS.

PELA HIPÓTESE DE INDUÇÃO TEMOS

$$|E(G')| \leq \left\lceil \frac{m'}{2} \right\rceil \left\lfloor \frac{m'}{2} \right\rfloor$$

ASSIM, TEMOS

$$|E(G)| \leq |E(G')| + n - 1 \leq \left\lceil \frac{m'}{2} \right\rceil \left\lfloor \frac{m'}{2} \right\rfloor + n - 1 \leq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \quad \square$$

$$\text{OBS: } \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil = \begin{matrix} \text{n PAR} \\ \nearrow \end{matrix} \frac{n^2}{4} = \frac{(n-2+2)^2}{4} = \frac{(n-2)^2}{4} + \frac{4(n-2)}{4} + \frac{4}{4} \\ = \left\lfloor \frac{n'}{2} \right\rfloor \left\lceil \frac{n'}{2} \right\rceil + n + 1$$

$\swarrow$
n ímpar

$$\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil = \frac{(n-1)}{2} \cdot \frac{(n+1)}{2} = \frac{((n'+2)-1)((n'+2)+1)}{4}$$

$$= \frac{(n'-1)(n'+1)}{2} + \frac{2}{4} (n'-1 + n'+1) + \frac{4}{4} = \left\lfloor \frac{n'}{2} \right\rfloor \left\lceil \frac{n'}{2} \right\rceil + n' + 1$$

PERGUNTA: Qual o maior número de arestas que podemos ter em um grafo sem cópias de K_{r+1} ?

Qual o grafo que maximiza esse número de arestas?

DEF: O grafo de Turán $T(n, r)$ é o grafo r -partido completo no qual as partes possuem no máximo um vértice de diferença, i.e.

$$V(T(n, r)) = V_1 \cup \dots \cup V_r \quad \text{e} \quad |V_i| \leq |V_j| + 1 \quad \forall i, j \leq r$$

1941

TEOREMA DE TURÁN: Dentre os grafos com n vértices sem cópias de K_{r+1} , o grafo que maximiza o número de arestas é $T(n, r)$

PROVA: Seja G um grafo com n vértices e sem cópia de K_{r+1} , que maximiza $|E(G)|$

AF1: G não possui vértices u, v, w t.q. $uv \in E(G)$ e $uw, vw \notin E(G)$.

PROVA:

Caso 1: $d(w) < d(u)$ ou $d(w) < d(v)$, digamos $d(w) < d(u)$

Considere o grafo $G' = G - w + u'$, onde u' possui exatamente os mesmos vizinhos de u .

G' não pode conter cópia de K_{r+1} contendo u e u' ao mesmo tempo. Então G' possui cópia de K_{r+1} se e somente se G também contém. Além disso

$$|E(G')| = |E(G)| - d(w) + d(u) > |E(G)|, \quad \text{contradição}$$

Caso 2: $d(w) \geq d(u), d(v)$

Considere o grafo $G' = G - u - v + w' + w''$, onde w' e w'' são cópias de w . Analogamente, G' não possui cópia de K_{r+1} . Além disso

$$|E(G')| = |E(G)| - d(u) - d(v) + 1 + 2d(w) > |E(G)|, \quad \text{CONT.} \quad \square$$

A AFIRMAÇÃO DIZ QUE SE u E v SÃO TAIS QUE $uv \notin E(G)$, ENTÃO $\forall w \in V - u - v$, DAS DUAS UMA

1) $uw, vw \in E(G)$

2) $uw, vw \notin E(G)$

ISSO IMPLICA QUE u E v SÃO "GÊMEOS".

OU SEJA, A NÃO-VIZINHANÇA É UMA RELAÇÃO DE EQUIVALÊNCIA.

PODEMOS PARTICIONAR $V(G)$ EM CONJ. IND., E G É K -PARTIDO COMPLETO PARA ALGUM K .

SE G POSSUI PARTES A E B COM $|A| > |B| + 1$, ENTÃO PODEMOS PASSAR UM VÉRTICE DE A PARA B . ASSIM, PERDEMOS $|B|$ ARESTAS, MAS GANHAMOS $|A| - 1$ ARESTAS.

PORÉM $|A| - 1 > |B| + 1 - 1 = |B|$.

□

TEOREMA (ERDŐS, 1970): SEJA G UM GRAFO LIVRE DE K_{r+1} COM n VÉRTICES. EXISTE UM GRAFO PARTIDO H t.q. $V(G) = V(H)$ E $d_H(v) \geq d_G(v)$ PARA TODO $v \in V(G)$.

PROVA: SIMETRIZAÇÃO DE ZYKOV.

- SEJA G UM GRAFO LIVRE DE K_{r+1} E SEJA $w \in V(G)$ UM VÉRTICE DE GRAU MÁXIMO
- PARA CADA VÉRTICE v EM $V(G) \setminus N(w)$, REMOVIEMOS AS ARESTAS DE v E FAZEMOS v SER VIZINHO DE TODO VÉRTICE EM $N(w)$.
- NOTE QUE O GRAU DE $u \in V(G)$ NÃO DIMINUI E O GRAFO NOVO É LIVRE DE K_{r+1}
- NOTE QUE $G[N(w)]$ É LIVRE DE K_r .
- A PROVA SEGUE USANDO INDUÇÃO (EM r) EM $G[N(w)]$.

TEOREMA DE ESTABILIDADE (ERDŐS - SIMONOVITS, 1966)

PARA TODO $\epsilon > 0$ EXISTE $\delta > 0$ TAL QUE VÁLIE O SEGUINTE.
SE G TEM n VÉRTICES, É LIVRE DE K_{r+1} E

$$e(G) \geq t_r(n) - \delta n^2,$$

ENTÃO G PODE SER TRANSFORMADO NO GRAFO DE TURÁN
PELA ADIÇÃO OU REMOÇÃO DE NO MÁXIMO ϵn^2 ARESTAS.

⇒ SE G TEM "QUASE" O NÚMERO DE ARESTAS DE $T_r(n)$,
ENTÃO G É "QUASE" O GRAFO $T_r(n)$

EXERCÍCIO: PROVAR O TEOREMA ACIMA P/ $r=2$.

GRAFOS BIPARTIDOS

• OS GRAFOS DE TURÁN POSSUEM MUITOS GRAFOS BIPARTIDOS COMPLETOS

• O QUE ACONTECE QUANDO PROIBIMOS QUADRADOS

MOTIVAÇÃO

DEF: SEQUÊNCIAS DE INTEIROS COM SOMAS DOIS-A-DOIS DISTINTAS SÃO SEQUÊNCIAS DE SIDON

PERGUNTA: SEJA $A = \{a_1, \dots, a_t\} \subseteq [m]$ T.q. $a_i a_j \neq a_k a_l$
Δ MENOS QUE $\{i, j\} = \{k, l\}$.

Qual o TAMANHO MÁXIMO DE A?

LIMITANTE INFERIOR: $\pi(m) =$ O NÚMERO DE PRIMOS EM $[m]$.
É O MELHOR POSSÍVEL?

DEF: DADO GRAFO H , USAMOS

$$ex(m, H) := \max \{e(G) : |G| = m \text{ e } G \text{ é livre de } H\}$$

$$EX: ex(m, K_{r+1}) = t_r(m) \approx \binom{m}{2} - r \binom{m/r}{2} \approx \left(1 - \frac{1}{r}\right) \binom{m}{2}$$

TEOREMA (Erdős, 1938): $e(n, C_4) = O(n^{3/2})$

PROVA: VAMOS CONTAR "CERESAS": TRIPLAS $(x, \{y, z\})$ DE VÉRTICES DISTINTOS EM G T.q. $xy, xz \in E(G)$. O NÚMERO DE TRIPLAS É

$$\sum_{v \in V(G)} \binom{d(v)}{2} \approx \sum_{v \in V(G)} \binom{2e(G)/n}{2}$$
$$\left\{ \begin{aligned} &= \frac{n}{2} \left(\frac{2e(G)}{n} \cdot \left(\frac{2e(G)}{2} - 1 \right) \right) \geq \frac{n}{2} \left(\frac{2e(G)}{n} - 1 \right)^2 \end{aligned} \right.$$

LEMBREMOS QUE O MAIOR GRÁFO M -PARTIDO COM $2e(G)$ VÉRTICES É O M -PARTIDO BALANÇADO.

$\sum \binom{d(v)}{2}$ CONTA O NÚMERO DE NÃO ARESTAS EM UM GRÁFO COM PARTES DE TAMANHO $d(v)$

- OBSERVE QUE SE EXISTE DUAS TRIPLAS NO MESMO PAR $\{y, z\}$, ENTÃO G POSSUI UM C_4 .
- ENTÃO O NÚMERO DE TRIPLAS É NO MÁXIMO $\binom{n}{2}$.

Logo
$$\frac{n}{2} \left(\frac{2e(G)}{n} - 1 \right)^2 \leq \binom{n}{2} \leq \frac{n^2}{2}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{2e(G)}{n} - 1 \right)^2 \leq n$$

$$\Rightarrow \frac{2e(G)}{n} - 1 \leq n^{1/2}$$

$$\Rightarrow e(G) \leq n^{3/2} + 1 = O(n^{3/2})$$

COROLÁRIO (Erdős, 1938): SEJA $A \subseteq [m]$ UM CONJ. DE SIDON MULTIPLICATIVO

$$\text{ENTÃO } |A| \leq \pi(n) + O(n^{3/4})$$

TEOREMA (KOVÁRI - SÓS - TURÁN, 1954): SE $s \leq t$, ENTÃO

$$\text{ex}(n, K_{s,t}) = O\left(n^{2-\frac{1}{s}}\right)$$

↑
BIP. COMPL. COM CLASSES DE TAMBANHOS s E t .

EXERCÍCIO: GENERALIZAR A PROVA DO TEO DE ERDŐS P/ O TEO ACIMA
IDEIA: CONTAR CÓPIAS DE $K_{1,s}$

TEO (KLEIN, BROWN, KOLLÁR - RÓNYAI - SZABÓ) SE $s \leq t$ E
 $s \in \{2, 3\}$ OU $t > (s-1)!$ ENTÃO

$$\text{ex}(n, K_{s,t}) = \Theta\left(n^{2-\frac{1}{s}}\right)$$

ÁRVORES:

CONJECTURA (ERDŐS - SÓS, 1963). SE $e(G) > \frac{1}{2}(k-2)|G|$, ENTÃO
 G CONTÉM TODAS AS ÁRVORES EM k VÉRTICES.

TEOREMA (AJTAI, KOMLÓS, SIMONOVITS, SZEMERÉDI, 2011)

A CONJECTURA DE ERDŐS E SÓS VALE P/ k SUFICIENTEMENTE GRANDE

LEMBREMOS DA AULA ANTERIOR:

DEF: DADO GRAFO H , USAMOS

$$ex(m, H) := \max \{e(G) : |G| = m \text{ e } G \text{ é livre de } H\}$$

DEF: $\pi_H(m) = \frac{ex(m, H)}{\binom{m}{2}}$ "DENSIDADE MÁX DE UM GRAFO LIVRE DE H "

DEF 2: $\pi_H = \lim_{m \rightarrow \infty} \pi_H(m)$ O NÚMERO DE TURÁN DE H

TEMOS QUE CHECAR QUE ESSE NÚMERO EXISTE

PROP: π_H EXISTE $\forall H$

PROVA: SEJA G UM GRAFO COM n VÉRTICES E LIVRE DE H .

CADA SUBGRAFO INDUZIDO DE G COM $n-1$ VÉRTICES POSSUI NO MÁXIMO $ex(n-1, H)$ ARESTAS.

$$\text{Logo, } \sum_{\substack{X \subseteq V(G) \\ |X| = n-1}} e(G[X]) \leq n \cdot ex(n-1, H)$$

CONTA CADA ARESTA DE G PRECISAMENTE DOIS VEZES

$$\text{Logo, } (n-1) e(G) \leq n \cdot ex(n-1, H)$$

$$\Rightarrow \frac{e(G)}{\binom{n}{2}} \leq \frac{ex(n-1, H)}{\binom{n-1}{2}} = \pi_H(n-1)$$

$$\Rightarrow \pi_H(n) \leq \pi_H(n-1)$$

Logo, π_H EXISTE

LEMMA: PARA QUALQUER REAIS ϵ, δ COM $\epsilon < \delta$, EXISTE m_0 T.q.
O SEGUINTE VALE P/ TODO $n \geq m_0 = 2/\epsilon$

SEJA G UM GRAFO COM n VÉRTICES E PELO MENOS $\delta \frac{n^2}{2}$ ARESTAS. ENTÃO EXISTE SUBGRAFO G' COM GRAU MÍNIMO PELO MENOS $(\delta - \epsilon)|V(G')|$ E $|V(G')| \geq \sqrt{\epsilon \frac{n^2}{2}}$

PROVA: VAMOS CONSTRUIR UMA SEQUÊNCIA DE GRAFOS

$$G = G_0, G_1, \dots \quad \text{t.q.} \quad |V(G_i)| = n - i$$

1) SE G_i TEM GRAU MÍNIMO PELO MENOS $(\delta - \epsilon)|V(G_i)|$, ACABE A SEQUÊNCIA

2) CASO CONTRÁRIO, SEJA G_{i+1} O GRAFO OBTIDO DE G_i AO REMOVEREMOS UM VÉRTICE DE GRAU $(\delta - \epsilon)(n - i) = (\delta - \epsilon)|V(G_i)|$

PARA CADA t TEMOS

$$\delta \frac{n^2}{2} \leq e(G) \leq e(G_t) + \sum_{i=1}^{t-1} (\delta - \epsilon)(n - i)$$

$$\leq e(G_t) + (\delta - \epsilon) \cdot (t-1) \left(n - \frac{t}{2}\right)$$

$$\leq \frac{(n-t)^2}{2} + (\delta - \epsilon) \left(tm - \frac{t^2}{2} - n + \frac{t}{2} \right)$$

$$\leq \frac{(n-t)^2}{2} + (\delta - \epsilon) \left(\frac{n^2 - (n-t)^2}{2} \right) + \frac{t}{2}$$

$$= (\delta - \epsilon) \frac{n^2}{2} + (1 - \delta + \epsilon) \frac{(n-t)^2}{2} + \frac{t}{2}$$

$$\Rightarrow \epsilon \frac{n^2}{2} \leq (1 - \delta + \epsilon) \frac{(n-t)^2}{2} + \frac{t}{2}$$

$$n^2 - (n^2 - 2nt + t^2) = 2nt - t^2$$

(2)

$$\sum_{i=1}^{t-1} (n-i) = (t-1)n - \sum_{i=1}^{t-1} i = (t-1)n - (t-1)\frac{t}{2} = (t-1) \left(n - \frac{t}{2}\right) \quad (1)$$

$$\varepsilon \frac{m^2}{2} \leq (1-s+\varepsilon) \left(\frac{(m-t)^2}{2} + \frac{t}{2} \right)$$

$$(m-t)^2 \geq \frac{\varepsilon m^2 - t}{(1-s+\varepsilon)} \geq \frac{\varepsilon m^2 - m}{(1-s+\varepsilon)} \geq \frac{\varepsilon m^2}{2(1-s+\varepsilon)} > \frac{\varepsilon}{4} m^2$$

$$t \leq m \quad -t \geq -m$$

$$\frac{\varepsilon}{2} m^2 \geq m$$

$$m \geq \frac{2}{\varepsilon}$$

$$\text{Assim, } (m-t)^2 > \frac{\varepsilon}{4} m^2$$

$$\Rightarrow |v(G_t)| > \frac{\sqrt{\varepsilon}}{2} m$$

□

DEF: $\chi(G)$ é o menor # de cores em uma coloração própria de $V(G)$

TEOREMA DE ERDŐS - STONE: $\pi_H = 1 - \frac{1}{\chi(H)-1}$

NOTE QUE $\pi_H \geq 1 - \frac{1}{\chi(H)-1}$ POR CAUSA DO GRAFO $(\chi(H)-1)$ -PARTIDO
MPLTO

QUE É LIVRE DE H E TEM DENSIDADE

$$\frac{t_{\chi(H)-1}(n)}{\binom{n}{2}} = \frac{\binom{n}{2} - (\chi(H)-1) \cdot \binom{n/\chi(H)-1}{2}}{\binom{n}{2}} = \frac{\frac{n}{\chi(H)-1} \cdot \left(\frac{n}{\chi(H)-1} - 1\right)}{2} \cdot \frac{2}{n(n-1)}$$

$$= 1 - \frac{\frac{n}{\chi(H)-1} - 1}{\frac{n(n-1)}{2}} = 1 - \frac{\frac{n}{\chi(H)-1} - 1}{n-1}$$

VAMOS PROVAR O TEOREMA QUANDO H É r -PARTIDO COMPLETO.

POIS SE G É LIVRE DE r -PARTIDO COMPLETO, ENTÃO G É LIVRE DE TODO GRAU r -PARTIDO.

PROVA: VAMOS MOSTRAR QUE $\forall \epsilon > 0$, EXISTE m_0 SUFICIENTEMENTE GRANDE
T.q. SE G É T.q. $|G| = n \geq m_0$ E $e(G) \geq (1 - \frac{1}{r} + \epsilon) \frac{n^2}{2}$,
ENTÃO G TEM CÓPIA DE H .

PELO LEMA ANTERIOR, G POSSUI UM SUBGRAFO G' COM $n' \geq \frac{\sqrt{\epsilon}}{2} n$
VÉRTICES E COM GRAU MÍNIMO PLO MENOS $(1 - \frac{1}{r} + \epsilon) \cdot n$

NOTE QUE PODEMOS ESCOLHER n GRANDE T.q. $n' \geq \frac{\sqrt{\epsilon}}{2} n$ É GRANDE
O SUFICIENTE PARA VALER O LEMA ANTERIOR.

$$n' \geq \frac{\sqrt{\epsilon}}{2} n \geq \frac{\sqrt{\epsilon}}{2} \left\lceil \frac{4t}{\epsilon} \right\rceil$$

AFIRMAÇÃO: DADO $s \in \{1, \dots, r+1\}$ E $t \in \mathbb{N}$, EXISTE $m_s = m_s(s, t)$ T.q. SE $n' \geq m_s$,
ENTÃO G POSSUI s -PARTIDO COMPLETO COM t VÉRTICES EM CADA PARTE,
QUE CHAMAMOS DE $K_s(t)$.

O RESULTADO VÁLÉ P/ $s=1$, POIS PODEMOS PEGAR t VÉRTICES.

SEJA s T.q. $1 < s \leq r+1$. PELA HIPÓTESE DE INDUÇÃO G' POSSUI UMA CÓPIA DE $K_{s-1}(T)$, ONDE $T = \lceil \frac{4t}{re} \rceil$ COM PARTIÇÃO $A_1, \dots, A_{s-1}$, SEJA $A = A_1 \cup \dots \cup A_s$.

VAMOS CONTAR s -TUPLAS DE VÉRTICES $(v_1, \dots, v_{s-1}, w)$ ONDE

$$v_i \in A_i \cap N(w) \quad \forall i=1, \dots, s-1$$

COMO O GRAU MÍNIMO DE G' É PELO MENOS $(1 - \frac{1}{r} + \epsilon)m'$, PARA CADA TUPLA $(v_1, \dots, v_{s-1}) \in A_1 \times \dots \times A_{s-1}$ HÁ

$$m' - r \left(\frac{1}{r} - \epsilon \right) m' = \cancel{m'} - \cancel{m'} + \epsilon m' \text{ OPÇÕES P/ } w$$

→ CADA VÉRTICE NÃO VÊ NO MÁXIMO $(\frac{1}{r} - \epsilon)m'$ VÉRTICES.

→ ASSIM, P/ CADA v_i , NO MÁXIMO $(\frac{1}{r} - \epsilon)m'$ DOS VÉRTICES DEIXAM DE SER OPÇÃO.

ASSIM, P/ CADA TUPLA $(v_1, \dots, v_{s-1}) \in A_1 \times \dots \times A_{s-1}$ HÁ PELO MENOS $\epsilon m' - |A|$ OPÇÕES P/ $w \notin A$

NOTE QUE $|A| = s \cdot \lceil \frac{4t}{re} \rceil$. ASSIM, SE $m' \geq \frac{2s}{re} \lceil \frac{4t}{re} \rceil$,

ENTÃO $\frac{\epsilon m'}{2} \geq \lceil \frac{4t}{re} \rceil = |A|$, O QUE IMPLICA

$$\epsilon m' - |A| \geq \frac{\epsilon}{2} m' \text{ escolhas P/ } w \notin A.$$

LOGO, O NÚMERO TOTAL DE TUPLAS É PELO MENOS

$$\frac{\epsilon}{2} m' \prod_{i=1}^s |A_i|$$

SEJA $W \subseteq V \setminus A$ O CONJUNTO DOS VÉRTICES CONTIDOS EM
PELO MENOS $\frac{re}{4} \prod |A_i|$ TUPLAS.

TUPLAS

NOTE QUE

$$\frac{re}{2} m' \prod |A_i| \leq \underbrace{|W| \cdot \prod |A_i|}_{\text{SE CADA } w \in W \text{ PERTENCE A TODAS AS TUPLAS EM } A_1 \times \dots \times A_s} + m' \cdot \underbrace{\frac{re}{4} \prod |A_i|}_{\text{SE } |W| = m' \text{ E CADA } w \in W \text{ ESTÁ CONTIDO EM EXATAMENTE } \frac{re}{4} \prod |A_i| \text{ TUPLAS}}$$

SE CADA $w \in W$
PERTENCE A TODAS
AS TUPLAS EM $A_1 \times \dots \times A_s$

↑
O # MÁX DE TUPLAS
QUE CONTÉM $w \in W$

SE $|W| = m'$
E CADA
 $w \in W$ ESTÁ
CONTIDO EM
EXATAMENTE
 $\frac{re}{4} \prod |A_i|$
TUPLAS
O NÚMERO
MÁX DE TUPLAS
QUE NÃO CONTÉM $w \in W$

LOGO, $|W| \geq \frac{re}{4} m'$

NOTE QUE CADA $w \in W$ TEM PELO MENOS $\frac{re}{4} |A_i| \geq t$ VIZINHOS EM A_i ;
DO CONTRÁRIO O NÚMERO DE TUPLAS QUE CONTÉM w É MENOR QUE

$$\frac{re}{4} \prod |A_i|$$

→ SEJA $N_i(w)$ OS VIZINHOS DE w EM A_i .

O NÚMERO DE TUPLAS QUE CONTÉM w É $\prod |N_i(w)|$.

- ALÉM DISSO $N_i(w) \subseteq A_i \Rightarrow |N_i(w)| \leq |A_i|$.
- O NÚMERO DE t -SUBCONJUNTOS DE A_i É $\binom{|A_i|}{t}$

- LOGO, O NÚMERO DE FORMAS DE ESCOLHER UM t -SUBCONJUNTO DE CADA A_i É $\binom{|A_i|}{t}^{s-1}$

- CADA VÉRTICE $w \in W$ "APONTA" PARA PELO MENOS UMA DESSAS escolhas. COMO TEMOS $|W| \geq \frac{re}{4} m'$, E PODEMOS ESCOLHER $m' > (t-1) \binom{|A_i|}{t}^{s-1} \frac{re}{4}$. HÁ UMA escolha com pelo menos t VÉRTICES DE W .

OU SEJA, HÁ UM CONS. $B_{s+1} \subseteq W$ COM PELO MENOS t VÉRTICES QUE FAZEM A MESMA ESCOLHA.

TEOREMA DE ESTABILIDADE (ERDŐS-SIMONOVITS)

PARA TODO $r \geq 3$ E $\epsilon > 0$, EXISTEM δ E m_0 T.q.
TODO GRÁFO G LIVRE DE K_{r+1} COM $n \geq m_0$ VÉRTICES T.q.
 $e(G) \geq (1 - \frac{1}{r} - \delta) \frac{n^2}{2}$ POSSUI CONJUNTOS INDEPENDENTES DISSJUNTOS
 $A_1, \dots, A_r$ T.q. $|A_1 \cup \dots \cup A_r| \geq (1 - \epsilon)n$.

PROVA:

TEOREMA (ANDRÁSFAI - ERDŐS - SÓS):

SE G É UM GRAFO COM n VÉRTICES, LIVRE DE TRIÂNGULOS E COM GRAU MÍNIMO MAIOR QUE $2n/5$, ENTÃO G É BIPARTIDO.

PROVA: SE G NÃO É BIPARTIDO, ENTÃO G POSSUI CIRCUITO DE COMPRIMENTO ÍMPAR Pelo menos 5

SEJA $C = x_1 \dots x_k$ UM CIRCUITO MAIS CURTO. C NÃO POSSUI CORDAS, DO CONTRÁRIO HAVENDO UM CIRCUITO ÍMPAR MAIS CURTO.

ALÉM DISSO, NENHUM VÉRTICE EM $V(G) \setminus V(C)$ PODE SER VIZINHO DE Pelo menos TRÊS VÉRTICES DE C , Pelo MESMO MOTIVO.

$$\text{LOGO, } \sum_{x \in V(C)} d(x) \leq \underset{\substack{\uparrow \\ \text{arestas de } C}}{2 \cdot k} + 2(n - k) = 2n$$

PELA CONDIÇÃO DO GRAU MÍNIMO TEMOS

$$\sum_{x \in V(C)} d(x) > \frac{2n}{5} \cdot k \geq 2n$$

MAS ISSO IMPLICA QUE $2n > 2n$ UM ABSURDO $\square$

GRAFOS ALEATÓRIOS

MOTIVAÇÃO: EXISTE UM GRAFO LIVRE DE TRIÂNGULOS E NÚMERO CROMÁTICO PELO MENOS k ?

DEF: A **CINTURA** DE G , DENOTADA POR $g(G)$ ^{→ GIRTH} É O COMPRIMENTO DO CIRCUITO MAIS CURTO EM G

TEOREMA (ERDŐS, 1959). DADO $k \in \mathbb{N}$, EXISTE GRAFO G T.Q.

$$\chi(G) \geq k \quad \text{e} \quad g(G) \geq k$$

PROVA: ESCOLHER UM GRAFO DE FORMA ALEATÓRIA, MODIFICAR E/

- PARA PROVAR QUE $\chi(G) \geq k$ VAMOS USAR O NÚMERO DE INDEPENDÊNCIA $\alpha(G) = \max\{|S| : S \subseteq V(G) \text{ é um CONS. IND.}\}$.
- COMO EM UMA COL. MIN. DE G , CADA COR FORMA UM CONS. IND., TEMOS

$$n \leq \chi(G) \cdot \alpha(G)$$

- ASSIM, SE $\alpha(G) \leq n/k$, TEMOS $\chi(G) \geq k$.

- FIXE $\epsilon > 0$ E TOME $p = n^{-(1-\epsilon)}$

E CONSIDERE G UM GRAFO COM n VÉRTICES NO QUAL PARA CADA PAR (x, y) DE VÉRTICES, A ARESTA xy ESTÁ EM G COM PROBABILIDADE p .

→ FORMALMENTE, NÓS ASSUMIMOS QUE HÁ UM ESPAÇO DE PROB. Ω E VARIÁVEIS ALEATÓRIAS INDEPENDENTES I_{vw} PARA CADA $\{v, w\} \in \binom{[n]}{2}$ T.Q. $\mathbb{P}(I_{vw} = 1) = 1 - \mathbb{P}(I_{vw} = 0) = p$

→ ASSIM, DADA UMA REALIZAÇÃO DE $\{I_{vw} : \{v, w\} \in \binom{[n]}{2}\}$, CONSTRUÍMOS G T.Q. $E(G) = \{vw : I_{vw} = 1\}$.

- AFIRMAMOS QUE, COM ALTO PROB. G POSSUI NO MÁXIMO $n/2$ CIRCUITOS DE COMPRIMENTO NO MÁX K , E NÃO POSSUI CONT. IND. DE TAMANHO $n/2K$.

- ASSIM, REMOVIEMOS UM VÉRTICE DE CADA UM DESSES CIRCUITOS, E OBTENEMOS UM GRAFO G COM $n/2$ VÉRTICES E T.q.

$$g(G) > K \text{ e } \chi(G) \geq \frac{n}{\chi(G)} > K$$

DESIGUALDADE DE MARKOV:

SE X É UMA VARIÁVEL ALEATÓRIA NÃO-NEGATIVA, E $a > 0$, ENTÃO

$$\mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{a}$$

$$\begin{aligned} \text{PROVA: } \mathbb{E}(X) &= \sum_z z \cdot \mathbb{P}(X=z) = \sum_{z < a} z \cdot \mathbb{P}(X=z) + \sum_{z \geq a} z \cdot \mathbb{P}(X=z) \\ &\geq \sum_{z \geq a} z \cdot \mathbb{P}(X=z) \geq a \sum_{z \geq a} \mathbb{P}(X=z) \end{aligned}$$

$$= a \mathbb{P}(X \geq a) \quad \square$$

- O NÚMERO ESPERADO DE CIRCUITOS DE COMPRIMENTO $l \leq K$ EM G É

$$\underbrace{n \cdot (n-1) \cdots (n-l+1)}_X \cdot p^l < n^l \cdot p^l = n^l (n^{-(1-l)})^l = n^{el}$$

TODAS AS SEQUÊNCIAS
DE VÉRTICES DE COMP $\leq K$

→ NOTE QUE $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{el}}{n} = 0$. LOGO P/ ALGUM n O NÚMERO DE CIRCUITOS CURTOS É MENOR QUE $\frac{n}{4}$

→ $\mathbb{E}(X) \leq \frac{n}{4}$ P/ n SUFICIENTEMENTE GRANDE

→ MARKOV: $\mathbb{P}(X \geq \frac{n}{2}) \leq \frac{\frac{n}{4}}{\frac{n}{2}} = \frac{1}{2}$

- O NÚMERO ESPERADO DE CONSS IND. DE TAMANHO $n/2k$ É NO MÁXIMO

$$\binom{n}{n/2k} \cdot p^{\binom{n/2k}{2}} \leq 2^n \cdot p^{\frac{n^2/4k^2}{2}} = 2^n \cdot p^{\frac{n^2}{8k^2}}$$

$$= 2^n \left(n^{-(1-\varepsilon)} \right)^{\frac{n^2}{8k}} = \frac{2^n}{\left(n^{(1-\varepsilon)} \right)^{\frac{n^2}{8k}}} = \left(\frac{2}{\frac{(1-\varepsilon)n}{n^{8k}}} \right)^n$$

→ QUE VAI P/ ϕ TAMBÉM.

→ $E(Y) < 1/2$ (PARA n SUFICIENTEMENTE GRANDE)

→ MARKOV: $P(Y > 1) \leq E(Y) < 1/2$

$$\Rightarrow P(X \geq n/2 \text{ ou } \alpha(G) \geq n/2k) \leq P(X \geq n/2) + P(Y > 1) < 1.$$

- CONSTRUIR ESSES GRAFOS É UMA TAREFA DIFÍCIL.

EX: $\chi(G) \geq k$ e $g(G) > 3$

- FAZEMOS UMA SEQUÊNCIA DE GRAFOS $G_2, \dots, G_k$

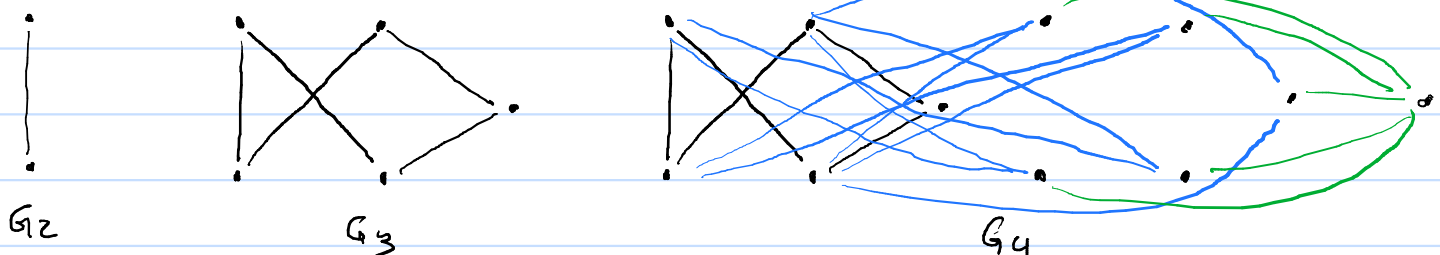
• $G_2 = K_2$

- OBTENHAMOS G_{i+1} DE G_i DA SEGUINTE FORMA

SEJA $V = V(G_i)$ E SEJA V' UMA CÓPIA DE V
 $V' = \{v' : v \in V\}$

- OS VIZINHOS DE $v' \in V'$ SÃO PRECISAMENTE OS VIZINHOS DE v EM G_i .

- ADICIONAMOS UM VÉRTICE EXTRA z LIGADO A TODOS $v' \in V'$.



- O legal é que podemos escolher **qualquer distribuição de prob** no conjunto de todos os grafos com n vértices
- Vamos estudar a distribuição usada na prova anterior.

O Gráfico Aleatório: O gráfico de **Erdős-Rényi** $G_{n,p}$ é o gráfico em n vértices obtido ao escolhermos cada aresta independentemente e com probabilidade p .

Assumimos que há um espaço de prob. Ω e var. aleatórias I_{vw} $p/\{v,w\} \in \binom{[n]}{2}$ t.q.

$$\mathbb{P}(I_{vw} = 1) = 1 - \mathbb{P}(I_{vw} = 0) = p$$

e tomando G t.q. $vw \in E(G) \iff I_{vw} = 1$.

- Fixada uma propriedade P , gostaríamos de saber para que valores de p o gráfico $G_{n,p}$ tem a prop. P com **alta probabilidade**.
- Dizemos que um evento E vale com alta probabilidade (with high probability, whp) se

$$\mathbb{P}(E) \rightarrow 1 \text{ quando } n \rightarrow \infty \quad \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(E) = 1 \right)$$

EX: Para que valores de p , $G_{n,p}$ possui ^(em geral) um triângulo?

OBS: P = "possui um triângulo" é uma propriedade **monótona**, i.e. se G possui um triângulo, então todo super gráfico de G possui um triângulo.

TEOREMA:

$$\mathbb{P}(G_{n,p} \text{ possuir um triângulo}) \rightarrow \begin{cases} 0 & \text{se } p \ll \frac{1}{n} \\ 1 & p \gg \frac{1}{n} \end{cases} \quad \left(\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = 0 \right) \quad \left(\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = 1 \right)$$

OBS: $\frac{1}{n}$ é a função linear (p/ triângulos)
THRESHOLD

PROVA: VAMOS PROVAR SEPARADAMENTE, USANDO OS MÉTODOS DE 1º E 2º MOMENTO.

~ O MÉTODO DE 1º MOMENTO SE REFERE A USAR A DESIGUALDADE DE MARKOV:

SEJA X A VARIÁVEL ALEATÓRIA QUE CONTA O NÚMERO DE TRIÂNGULOS EM $G_{n,p}$. LOGO

$$\mathbb{P}(G_{n,p} \text{ contém um triângulo}) = \mathbb{P}(X \geq 1)$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{MARKOV}}}{\leq} \frac{\mathbb{E}(X)}{1} = \binom{n}{3} p^3 \leq n^3 p^3 \xrightarrow{\substack{\uparrow \\ \text{HIPÓTESE}}} 0$$

~ O MÉTODO DO 2º MOMENTO SE REFERE AO USO DA DESIGUALDADE DE CHEBYCHEV.

SEJA X UMA VARIÁVEL ALEATÓRIA COM VALOR ESPERADO μ E VARIÂNCIA σ^2 , E SEJA $\lambda > 0$. ENTÃO

$$\mathbb{P}(|X - \mu| \geq \lambda \sigma) \leq \frac{1}{\lambda^2}$$

PROVA: APLICAR MARKOV NA VARIÁVEL $Y = (X - \mu)^2$ COM $a = (\lambda \sigma)^2$

$$\mathbb{P}(|X - \mu| \geq \lambda \sigma) = \mathbb{P}((X - \mu)^2 \geq (\lambda \sigma)^2) \leq \frac{\mathbb{E}(Y)}{(\lambda \sigma)^2}$$

AGORA, NOTE QUE SE $X=0$ ENTÃO $|X-\mu| \geq \mu$, ENTÃO

$$P(X=0) \leq P(|X-\mu| \geq \mu)$$

ASSIM, PELA DESIG. DE CHEBYCHEV COM $\lambda = \frac{\mu}{\sigma}$, TEMOS

$$P(X=0) \leq P(|X-\mu| \geq \mu) \leq \frac{1}{\lambda^2} = \frac{\sigma^2}{\mu^2} = \frac{\text{Var}(X)}{\mathbb{E}(X)^2}$$

LEMBREMOS QUE $\text{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$

COMO X INDICA O NÚMERO DE TRIÂNGULOS DE G , PODEMOS ESCREVER

$$X = \sum_{u \in \binom{[n]}{3}} 1[u]$$

ONDE $1[u]$ É A VARIÁVEL INDICADORA DO TRIÂNGULO $u \in \binom{[n]}{3}$, I.E

$$1[u] = \begin{cases} 0 & \text{SE } E(u) \subseteq E(G) \\ 1 & \text{SE } E(u) \not\subseteq E(G) \end{cases}$$

ASSIM, TEMOS $X^2 = \sum_{(u,v) \in \binom{[n]}{3} \times \binom{[n]}{3}} 1[u] 1[v]$ — NOTE QUE VALE 1 SE E SOMENTE SE u E v ESTÃO EM G , OU SEJA, COM PROB. $P(u \wedge v)$

$$\text{Logo } \mathbb{E}(X^2) = \sum_{(u,v)} P(u \wedge v)$$

Por outro lado, $\mathbb{E}(X) = \sum_{u \in \binom{[n]}{3}} P(u)$, O QUE IMPLICA

$$\mathbb{E}(X)^2 = \sum_{(u,v) \in \binom{[n]}{3} \times \binom{[n]}{3}} P(u) \cdot P(v)$$

Logo,

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \sum_{(u,v)} (\mathbb{P}(u \wedge v) - \mathbb{P}(u) \cdot \mathbb{P}(v))$$

Note que se $|u \wedge v| = 1$, então u e v não possuem arestas em comum, logo são independentes, i.e., $\mathbb{P}(u \wedge v) = \mathbb{P}(u) \cdot \mathbb{P}(v)$.

Assim, temos

$$\begin{aligned} \text{Var}(X) &= \sum_{\substack{(u,v) \\ |u \wedge v| \geq 2}} (\mathbb{P}(u \wedge v) - \mathbb{P}(u) \cdot \mathbb{P}(v)) \\ &\leq \sum_{|u \wedge v|=2} \mathbb{P}(u \wedge v) + \sum_{|u \wedge v|=3} \mathbb{P}(u \wedge v) \\ &\leq n^4 p^4 + n^3 p^3 \end{aligned}$$

Como $\mathbb{E}(X) = \binom{n}{3} p^3 = \Theta(n^3 p^3)$, temos $\mathbb{E}(X)^2 = \Theta(n^6 p^6)$

Pela des. de Chebyshev, temos

$$\mathbb{P}(X=0) \leq \frac{\text{Var}(X)}{\mathbb{E}(X)^2} \leq \frac{n^4 p^4 + n^3 p^3}{C \cdot n^6 p^6} \xrightarrow{\quad} 0$$

se $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{p n} = 0$, i.e. $p n \ll 1$

Podemos estender esse método:

Teorema: $\mathbb{P}(G_{n,p} \text{ contém uma cópia de } K_r) \rightarrow \begin{cases} 0 & \text{se } p \ll n^{-2/(r-1)} \\ 1 & \text{se } p \gg n^{-2/(r-1)} \end{cases}$

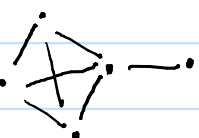
Problema: Provar que p/ toda função $p = p(n)$, existe uma função $K = K(n)$ t.q. o tamanho do maior clique de $G_{n,p}$ é, com alta probabilidade, K ou $K+1$.

É NATURAL ESPERAR QUE O LIMITE P/ UM GRÁFO H , i.e., A FUNÇÃO LIMITE P/ QUE $G_{m,p}$ CONTENHA UMA CÓPIA DE H , SEJA

$$\mathbb{E}(X_H(G_{m,p})) \approx 1$$

ONDE $X_H(G)$ É O NÚMERO DE CÓPIAS DE H EM G .

~* ESSA CONJECTURA É FALSA!

SEJA $H =$ 

NOTE QUE $\mathbb{E}(X_H) \approx m^5 p^7 \Rightarrow$ A PREVISÃO DO LIMITE É $m^{-5/7}$

TEOREMA: $\mathbb{P}(X_H(G_{m,p})) \rightarrow \begin{cases} 0 & \text{se } p \ll m^{-2/3} \\ 1 & \text{se } p \gg m^{-2/3} \end{cases}$

PROVA: VAMOS USAR O TEOREMA ANTERIOR E A TÉCNICA DE **BORRIFAMENTO**.

NOTE QUE G CONTÉM H SOMENTE SE G CONTÉM K_4 .
 LOGO $\mathbb{P}(G_{m,p} \text{ CONTÉM } H) \leq \mathbb{P}(G_{m,p} \text{ CONTÉM } K_4)$

SE $p \ll m^{-2/3}$, PELO TEO. ACIMA, TEMOS

$$\mathbb{P}(G_{m,p} \text{ CONTÉM } K_4) \rightarrow 0$$

0 QUE IMPLICA $\mathbb{P}(G_{m,p} \text{ CONTÉM } H) \rightarrow 0$.

ENTÃO, SUPONHA QUE $p \gg m^{-2/3}$

SEJA G O GRÁFO FORMADO PELA UNIÃO DE DUAS CÓPIAS G_1, G_2 INDEPENDENTES DE $G_{m, p/2}$. NOTE QUE $G \sim G_{m, p'}$ ONDE $p' = p - (p/2)^2 < p$

↑ A PROB. DAS DUAS CÓPIAS NÃO TEREM A ARESTA.

NOTE QUE COMO $p \gg 1$, TEMOS $p/2 \gg 1$

LOGO G_1 POSSUI UMA CÓPIA C DE K_4 , COM ALTA PROB.

ALÉM DISSO, A PROB. DE G_2 POSSUIR UMA ARESTA COM EXATAMENTE UM VÉRTICE EM C É

$$1 - (1 - p/2)^{4(n-4)}$$

LEMBRE-SE QUE, SE $x > -1$, ENTÃO $e^x \geq 1+x$.

COLOCANDO $x = -p/2$, TEMOS $e^{-p/2} \geq 1 - p/2$

$$\Rightarrow (e^{-p/2})^{2n} \geq (1 - p/2)^{2n}$$

$$\Rightarrow -e^{-pm} \leq -(1 - p/2)^{2n}$$

$$\text{LOGO, } 1 - (1 - p/2)^{4(n-4)} \geq 1 - (1 - p/2)^{2n} \geq 1 - e^{-pm}$$

COMO $p \gg n^{-2/3}$, TEMOS $\lim pm^{2/3} \rightarrow \infty$

COMO $pm \gg pm^{2/3}$, ENTÃO $pm \rightarrow \infty$,
O QUE IMPLICA

$$e^{-pm} \rightarrow 0$$

E, PORTANTO, $1 - e^{-pm} \rightarrow 1$.

ASSIM, COM ALTA PROBABILIDADE $G = G_1 \cup G_2$ POSSUI CÓPIA DE H .

FUNÇÕES MONÔTONAS

DEF: UMA FUNÇÃO $f: \{0,1\}^N \rightarrow \mathbb{R}$ É DITA **MONOTONICAMENTE CRESCENTE** SE PARA TODOS $x = (x_1, \dots, x_N)$ E $y = (y_1, \dots, y_N)$ T.q. $x_i \leq y_i \forall i$, TEMOS $f(x) \leq f(y)$

DEF: DIZEMOS QUE f É **MONOTONICAMENTE DECRESCENTE** SE $-f$ É MONOTONICAMENTE CRESCENTE.

• PODEMOS PENSAR f COMO UMA FUNÇÃO EM GRAFOS, ONDE $N = \binom{n}{2}$ E $\{0,1\}^N$ INDICA AS ARESTAS DE UM GRAFO

~> NESTE CASO, UMA FUNÇÃO $f: \mathcal{G}_n \rightarrow \mathbb{R}$ É MONOTONICAMENTE CRESCENTE SE $\forall G, H$ T.q. $G \subseteq H$, TEMOS $f(G) \leq f(H)$.

~> f PODE SER UMA FUNÇÃO INDICADORA DE UMA PROPRIEDADE A
i.e. $f: \mathcal{G}_n \rightarrow \{0,1\}$ E $f(G) = 1 \iff G \in A$.

EX: $A = \{\text{GRAFOS QUE POSSUEM TRIÂNGULOS}\}$ É UMA PROPRIEDADE MONOTONICAMENTE CRESCENTE

EX: $B = \{\text{GRAFOS PLANARES}\}$ É UMA PROP. MONO. DECRESCENTE.

SE $\mathcal{C}_N = \{0,1\}^N$ É UM ESPAÇO DE PROBABILIDADES, COLOCAMOS

$$P(x) = \prod_{x_i=1} p_i \cdot \prod_{x_i=0} (1-p_i)$$

TEOREMA: SE f, g SÃO MONO. CRESCENTES EM $\{0,1\}^N$,
ENTÃO $E(fg) \geq E(f) \cdot E(g)$.

PROVA: INDUÇÃO EM N . SE $N=0$, ENTÃO $E(f)=a$, $E(g)=b$ E
 $E(fg)=ab$.

SUPONHA QUE O ENUNCIADO VALE P/ $N-1$, E SUPONHA QUE
 $E(f|X_N=0)=a$ E $E(g|X_N=0)=b$, ENTÃO

$$E((f-a)(g-b)) = E(f-a)E(g-b) = E(fg) - E(f)E(g)$$

LINEARIDADE DA ESPERANÇA

~* OU SEJA, PODEMOS TOMAR $f'=f-a$ E $g'=g-b$
QUE SÃO MONO. CRESCENTES, E POSSUEM AS SEGUINTE
PROPRIEDADES:

$$1) \begin{aligned} E(f'|X_N=0) &= E(f-a|X_N=0) = E(f|X_N=0) - a = 0 \\ E(g'|X_N=0) &= E(g-b|X_N=0) = E(g|X_N=0) - b = 0 \end{aligned}$$

$$2) E(f'g') - E(f')E(g') = E(fg) - E(f)E(g)$$

$$\Rightarrow \text{O ENUNCIADO VALE P/ } f \text{ E } g \iff f' \text{ E } g'$$

COMO f' E g' SÃO MONO. CRESCENTES, TEMOS

$$E(f'|X_N=1) \geq E(f'|X_N=0)$$

$$E(g'|X_N=1) \geq E(g'|X_N=0)$$

PELA HIPÓTESE DE INDUÇÃO, TEMOS

$$E(f'g'|X_N=0) \geq E(f'|X_N=0) \cdot E(g'|X_N=0)$$

$$E(f'g'|X_N=1) \geq E(f'|X_N=1) \cdot E(g'|X_N=1)$$

Além disso, temos

IGNORAMOS

$$\mathbb{E}(f'g') = \mathbb{E}(f' | X_N=0)(1-p_N) + \mathbb{E}(f'g' | X_N=1) \cdot p_N \\ \geq \mathbb{E}(f' | X_N=1) \cdot \mathbb{E}(g' | X_N=1) \cdot p_N$$

Por outro lado,

$$\mathbb{E}(f') \cdot \mathbb{E}(g') = \left(\mathbb{E}(f' | X_N=0)(1-p_N) + \mathbb{E}(f' | X_N=1)p_N \right) \times \\ \left(\mathbb{E}(g' | X_N=0)(1-p_N) + \mathbb{E}(g' | X_N=1)p_N \right) \\ = \mathbb{E}(f' | X_N=1) \cdot \mathbb{E}(g' | X_N=1) p_N^2 \\ \leq \mathbb{E}(f' | X_N=1) \cdot \mathbb{E}(g' | X_N=1) \cdot p_N \\ \leq \mathbb{E}(f'g')$$

□

COROLÁRIO: SE A E B SÃO DUAS PROPRIEDADES MONO. CRESCENTES DE GRAFOS, ENTÃO

$$\mathbb{P}((G_{n,p} \in A) \wedge (G_{n,p} \in B)) \geq \mathbb{P}(G_{n,p} \in A) \cdot \mathbb{P}(G_{n,p} \in B)$$

PROVA: SEJAM I_A E I_B DUAS FUNÇÕES INDICADORAS DE A E B IE.

$$I_A(G) = 1 \iff G \in A \quad \text{e} \quad I_B(G) = 1 \iff G \in B$$

Obviamente, $I_A \cdot I_B$ é uma função indicadora de $A \cap B$.

Além disso, I_A e I_B são mono crescentes. E

$$\mathbb{P}(G_{n,p} \in A) = \mathbb{E}(I_A) \quad \text{e} \quad \mathbb{P}(G_{n,p} \in B) = \mathbb{E}(I_B)$$

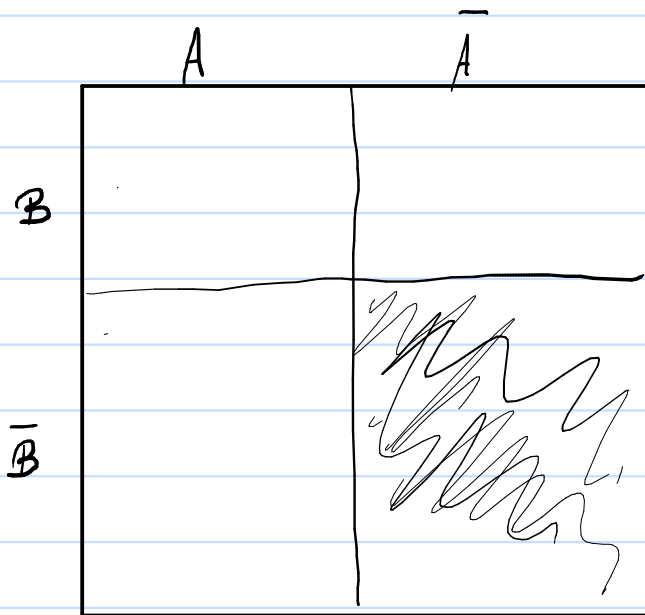
E o corolário segue do teorema acima.

OBS: SEJAM A E B DUAS PROPRIEDADES MONO. DECRESCENTES.
 TEMOS QUE $\bar{A}$ E $\bar{B}$ SÃO DUAS PROPRIEDADES MONO. CRESCENTES.

$$\begin{aligned} \text{LOGO, } P((G_{m,p} \in \bar{A}) \wedge (G_{m,p} \in \bar{B})) &\geq P(G_{m,p} \in \bar{A}) \cdot P(G_{m,p} \in \bar{B}) \\ &= (1 - P(G_{m,p} \in A)) \cdot (1 - P(G_{m,p} \in B)) \\ &= 1 - P(G_{m,p} \in A) - P(G_{m,p} \in B) + P(G_{m,p} \in A) \cdot P(G_{m,p} \in B) \end{aligned}$$

NOTE QUE

$$P((G_{m,p} \in \bar{A}) \wedge (G_{m,p} \in \bar{B})) + P(G_{m,p} \in A) + P(G_{m,p} \in B) - P(G_{m,p} \in A \wedge G_{m,p} \in B) = 1$$



$$\begin{aligned} \text{LOGO, } P((G_{m,p} \in \bar{A}) \wedge (G_{m,p} \in \bar{B})) &\geq P(G_{m,p} \in \bar{A}) \cdot P(G_{m,p} \in \bar{B}) \\ &= (1 - P(G_{m,p} \in A)) \cdot (1 - P(G_{m,p} \in B)) \\ &= 1 - P(G_{m,p} \in A) - P(G_{m,p} \in B) + P(G_{m,p} \in A) \cdot P(G_{m,p} \in B) \\ &= P((G_{m,p} \in \bar{A}) \wedge (G_{m,p} \in \bar{B})) - P(G_{m,p} \in A \wedge G_{m,p} \in B) \\ &\quad + P(G_{m,p} \in A) \cdot P(G_{m,p} \in B) \end{aligned}$$



PROP: SEJA $p = c/m$. ENTÃO $P(G_{m,p} \text{ CONTER TRIÂNGULO}) \leq 1 - e^{-c^3/6}$

PROVA: VAMOS PROVAR QUE $P(G_{m,p} \text{ NÃO CONTER TRIÂNGULO}) \geq e^{-c^3/6}$

PARA CADA TRIPLA $X \subseteq [m]$, SEJA B_X O EVENTO " X INDUZ UM TRIÂNGULO"
I.E. SE $X = \{x, y, z\}$ ENTÃO $\{xy, xz, yz\} \subseteq E(G_{m,p})$.

OS EVENTOS B_X SÃO MONO. DECRESCENTES E TÊM PROB. $1 - p^3$.

PELA DES. DE FKG, TEMOS

$$P(G_{m,p} \text{ NÃO CONTER TRIÂNGULOS}) = P\left(\bigwedge_{X \in \binom{[m]}{3}} \overline{B_X}\right)$$

$$\geq \prod_{X \in \binom{[m]}{3}} P(\overline{B_X})$$

$$m(m-1)(m-2) = m(m^2 - 3m + 2)$$

$$= (1 - p^3)^{\binom{m}{3}} \rightarrow e^{-c^3/6}$$

$$\parallel \left(1 - \frac{c^3}{m^3}\right)^{\binom{m}{3}}$$

$$\binom{m}{3} = \frac{m^3 - 3m^2 + 2m}{6}$$

$$\parallel \left(1 - \frac{c^3}{m^3}\right)^{\frac{m^3}{6}} \left(1 - \frac{c^3}{m^3}\right)^{\frac{-3m^2 + 2m}{6}}$$

DESIGUALDADES DE JANSON

SEJAM $A_1, \dots, A_m \subseteq [N]$ E SEJA $Y \subseteq [N]$ UM CONJUNTO NO QUAL CADA ELEMENTO FOI ESCOLHIDO DE FORMA ALEATÓRIA COM PROB. p , I.E. $\mathbb{P}(j \in Y) = p$, PARA CADA j .

- VAMOS PENSAR EM $N = \binom{m}{2}$, E CADA A_i É UM SUBGRUPO DE K_m

SEJA $B_j := \{A_j \subseteq Y\}$ E OBSERVE QUE ESSES EVENTOS SÃO MON. CRESCENTES. ALÉM DISSO, SE A_i E A_j NÃO SE INTERSECTAM, ENTÃO B_i E B_j SÃO EVENTOS INDEPEND.

DEFINA

$$\mu = \sum_j \mathbb{P}(B_j) \quad (\text{O NÚMERO ESPERADO DE EVENTOS TRUINS})$$

E

$$\Delta = \sum_{i \sim j} \mathbb{P}(B_i \wedge B_j) \quad (\text{ONDE } i \sim j \text{ SE } A_i \cap A_j \neq \emptyset)$$

TEOREMA (JANSON, 1987). SEJAM $A_1, \dots, A_m \subseteq [N]$ E $B_1, \dots, B_m$ DEFINIDOS COMO ACIMA. ENTÃO

$$\mathbb{P}\left(\bigwedge_{j=1}^m \overline{B_j}\right) \leq e^{-\mu + \Delta/2}$$

ALÉM DISSO, SE $\Delta \gg \mu$, ENTÃO

$$\mathbb{P}\left(\bigwedge_{j=1}^m \overline{B_j}\right) \leq e^{-\mu^2/2\Delta}$$

NOTE QUE PELA DES. DE FKG, SE $\mathbb{P}(B_j) \ll 1 \ \forall j$, ENTÃO

$$\mathbb{P}\left(\bigwedge_{j=1}^m \overline{B_j}\right) \geq \prod_j (1 - \mathbb{P}(B_j)) \approx e^{-\mu}.$$

LOGO, A DES. É ΔPROX. JUSTO.

SEGUNDA PARTE DO TEO. SOBRE PROB. DE TRIÂNGULOS.

PROOF: PARA CADA TRIPLA $X = \{x, y, z\} \subseteq [n]$ SEJA B_X O EVENTO NO QUAL ESSES VÉRTICES FORMAM UM TRIÂNGULO EM $G_{n,p}$.

~ SÃO $\binom{n}{3}$ EVENTOS B_X DA FORMA $A_X \subseteq E(G_{n,p}) \subseteq [N]$, COM $N = \binom{n}{2}$

$$\text{NOTE QUE } \mu = \sum_X \mathbb{P}(B_X) = p^3 \binom{n}{3} \in$$

$$\Delta = \sum_{X \sim Y} \mathbb{P}(B_X \wedge B_Y) = O(n^4 p^5) \ll \mu.$$

PELA PRIMEIRA DES. DE JANSON:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(G_{n,p} \text{ NÃO POSSUI TRIÂNGULO}) &= \mathbb{P}\left(\bigwedge_X \overline{B_X}\right) \\ &\leq e^{-\mu + \Delta/2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{-c/6} \end{aligned}$$

□

CONEXIDADE

PERGUNTA: PARA QUAIS p , $G_{n,p}$ É PROVAVELMENTE CONEXO?

TEOREMA: PARA TODO $\epsilon > 0$, TEMOS

$$\mathbb{P}(G_{n,p} \text{ É CONEXO}) \rightarrow \begin{cases} 0 & \text{se } p \leq \frac{(1-\epsilon)\log n}{n} \\ 1 & p \geq \frac{(1+\epsilon)\log n}{n} \end{cases}$$

PROVA: VAMOS USAR OS MÉTODOS DO 1º E 2º MOMENTO PARA PROVAR A SEGUNDA E A PRIMEIRA PARTE, RESPECTIVAMENTE.

NOTE QUE SE $G_{n,p}$ POSSUI VÉRTICE ISOLADO, ENTÃO $G_{n,p}$ CERTAMENTE NÃO É CONEXO. LOGO.

$$\mathbb{P}(G_{n,p} \text{ POSSUI VÉRTICE ISOLADO}) \leq \mathbb{P}(G_{n,p} \text{ É DESCONEXO})$$

SEJA $X = X(G)$ A FUNÇÃO QUE DENOTA O NÚMERO DE VÉRTICES ISOLADOS DE G .

$$\text{SUPONHA QUE } p \leq \frac{(1-\epsilon)\log n}{n}.$$

TEMOS

$$\mathbb{E}(X(G_{n,p})) = n(1-p)^{n-1} > n e^{-(p+p^2)(n-1)} \gg e^{\epsilon/2}$$

$(1-x) > e^{-(x+x^2)}$

ALÉM DISSO, A VARIÂNCIA DE $X(G_{n,p})$ É LIMITADA POR

$$\begin{aligned} \text{Var}(X(G_{n,p})) &\leq \sum_{(u,v)} (\mathbb{P}(u \wedge v) - \mathbb{P}(u) \cdot \mathbb{P}(v)) \\ &\leq \mathbb{E}(X) + n^2 \left((1-p)^{2n-3} - (1-p)^{2n-2} \right) \\ &= \mathbb{E}(X) + \frac{p}{1-p} \mathbb{E}(X)^2 \end{aligned}$$

NOTE QUE

$$\frac{\text{Var}(X)}{\mathbb{E}(X)^2} \leq \frac{1}{\mathbb{E}(X)} + \frac{p}{1-p} \} \rightarrow 0 \rightarrow 0$$

$$\mu = \mathbb{E}(X) \\ \sigma^2 = \text{Var}(X)$$

ASSIM, PELA DES. DE CHEBYCHEV $(\mathbb{P}(|X - \mu| \geq \lambda \sigma) \leq \frac{1}{\lambda^2})$, TEMOS

$$\mathbb{P}(G_{m,p} \text{ é CONEXO}) \leq \mathbb{P}(X=0)$$

$$\leq \mathbb{P}(|X - \mu| \geq \mu)$$

$$\text{colocando} \\ \lambda = \mu / \sigma$$

$$\leq \frac{\sigma^2}{\mu^2} = \frac{\text{Var}(X)}{\mathbb{E}(X)^2} \rightarrow 0$$

SEJA $\varepsilon' = \varepsilon/3$, E SUPONHA QUE $p \geq \frac{(1+3\varepsilon') \log^m}{m}$

PARA PROVAR A SEGUNDA PARTE USAREMOS OUTRA VARIÁVEL ALEATÓRIA
SEJA $Y_k(G)$ A VAR ALEATÓRIA QUE CONTA O NÚMERO DE
COMPONENTES DE TAMANHO k EM G :

$$\text{TEMOS } \mathbb{E}(Y_k(G_{m,p})) \leq \binom{m}{k} (1-p)^{k(m-k)}$$

$$\text{SE } k \leq \varepsilon' m, \text{ TEMOS } \binom{m}{k} (1-p)^{k(m-k)} \leq \left(\frac{em}{k} e^{-(1-\varepsilon)p m} \right)^k$$

$$\text{PORQUE } \binom{m}{k} \leq \left(\frac{em}{k} \right)^k \text{ E } m-k \geq (1-\varepsilon')m.$$

COMO $p > 0$, TEMOS $1-p < 1$, E PORTANTO $(1-p)^{(m-k)} \leq (1-p)^{(1-\varepsilon')m}$
ALÉM DISSO, TEMOS $e^x \geq 1+x$, COLOCANDO $x = -p$, TEMOS $1-p \leq e^{-p}$

$$\text{LOGO, } (1-p)^{m-k} \leq e^{-p(1-\varepsilon')m}$$

$$\text{SE } k \geq \varepsilon' m, \text{ TEMOS } \binom{m}{k} (1-p)^{k(m-k)} \leq 2^m e^{-\varepsilon'^2 m/2}$$

$$\text{PORQUE } (1-p) \leq e^{-p} \leq e^{-(1-\varepsilon')p}$$

A COMPONENTE GIGANTE

PERGUNTA: QUÃO GRANDE É A MAIOR COMPONENTE DE $G_{m,p}$?

DEF: SEJA $C_1(G)$ O TAMANHO DA COMPONENTE DE G COM MAIOR NÚMERO DE VÉRTICES?

TEOREMA (ERDŐS - RENYI, 1960, BOLLOBÁS, 1984).

SEJA $c > 0$ UMA CONSTANTE E $p = c/m$. ENTÃO

$$C_1(G_{m,p}) = \begin{cases} O(\log^m) & \text{SE } c < 1 \\ \theta(m^{2/3}) & \text{SE } c = 1 \\ \theta(m) & \text{SE } c > 1 \end{cases}$$

(1)

(2)

(3)

COM ALTA PROBABILIDADE QUANDO $m \rightarrow \infty$.

ALÉM DISSO, SE $c \neq 1$, ENTÃO O TAMANHO DA SEGUNDA MAIOR COMPONENTE DE $G_{m,p}$ É $O(\log^m)$ COM ALTA PROBABILIDADE.

~ VAMOS PROVAR OS ITENS (1) E (3).

O LEMMA DE REGULARIDADE DE SZEMERÉDI

~> VIMOS QUE EM QUALQUER COLORAÇÃO DOS INTEIROS EXISTE UMA COR QUE POSSUI PROGRESSÕES ARITMÉTICAS ARBITRARIAMENTE GRANDES.

~> ERDŐS E TURÁN CONJECTURARAM QUE A COLORAÇÃO É APENAS UMA DETRAÇÃO

DEF: A DENSIDADE SUPERIOR DE UM CONJUNTO $A \subseteq \mathbb{N}$ É

$$\bar{d}(A) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{|A \cap [n]|}{n}$$

CONJECTURA: SE $\bar{d}(A) > 0$, ENTÃO A POSSUI PROGRESSÕES ARITMÉTICAS ARBITRARIAMENTE GRANDES.

PERGUNTA: QUANTO NÓS PODEMOS APROXIMAR UM GRAFO ARBITRÁRIO POR UMA COLEÇÃO DE GRAFOS ALEATÓRIOS?

SZEMERÉDI: DADO QUALQUER GRAFO G , PODEMOS PARTICIONAR SEU CONJUNTO DE VÉRTICES $V(G)$ EM UM NÚMERO LIMITADO DE PARTES, DIGAMOS NO MÁXIMO K , TAL QUE PARA QUASE TODOS OS PARES DE PARTES (A, B) , O GRAFO INDUZIDO $G[A, B]$ SE PARECE COM UM GRAFO ALEATÓRIO.

~> VAMOS DEIXAR ESSES TERMOS MAIS PRECISOS, EM FUNÇÃO DE UM PARÂMETRO $\epsilon > 0$.

~> O PONTO CRUCIAL É QUE K DEPENDE DE ϵ , MAS NÃO DE $n = |V(G)|$

- **QUASE TODOS** SIGNIFICA **TODOS EXCETO NO MÁXIMO EM²**

DEF: DADOS CONJUNTOS $X, Y \subseteq V(G)$, ESCRIVEMOS $e(X, Y)$ PARA DENOTAR O NÚMERO DE DE ARESTAS DE X PARA Y .

$$e(X, Y) = |\{xy \in E(G) : x \in X, y \in Y\}|$$

DEF: SEJA $\varepsilon > 0$ E SEJAM $A, B \subseteq V(G)$ CONJUNTOS DISTINTOS DE VÉRTICES DE UM GRAFO G . DIZEMOS QUE O PAR (A, B) É **ε -REGULAR** SE

$$\left| \frac{e(A, B)}{|A||B|} - \frac{e(X, Y)}{|X||Y|} \right| \leq \varepsilon$$

PARA TODO $X \subseteq A, Y \subseteq B$ COM $|X| \geq \varepsilon|A|, |Y| \geq \varepsilon|B|$.

→ PARA TODO PAR (X, Y) SUFICIENTEMENTE GRANDE, A DENSIDADE DE (X, Y) É QUASE A MESMA DE (A, B) .

PROP: QUALQUER PAR (A, B) É ε -REGULAR EM $G_{m, p}$.

DESIGUALDADE DE CHERNOFF: $\mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}(e^{t \cdot X})}{e^{t \cdot a}}$, PARA $t > 0$.

PROVA: BASTA APLICAR MARKOV EM $e^{t \cdot X}$ PARA QUALQUER $t > 0$.

$$\mathbb{P}(X \geq a) = \mathbb{P}(e^{t \cdot X} \geq e^{t \cdot a}) \leq \frac{\mathbb{E}(e^{t \cdot X})}{e^{t \cdot a}}$$

PROVA: SEJAM $A, B \subseteq V(G_{m, p})$ COM $A \cap B = \emptyset$.

SEJAM $X \subseteq A$ E $Y \subseteq B$ COM $|X| \geq \varepsilon|A|$ E $|Y| \geq \varepsilon|B|$

SEJA Z A VARIÁVEL ALEATÓRIA QUE CALCULA A DIFERENÇA

$$\left| \frac{e(A, B)}{|A||B|} - \frac{e(X, Y)}{|X||Y|} \right|$$

~> SE ACREDITAMOS QUE PARES ϵ -REGULARES SE PARECEM COM GRAFOS ALEATÓRIOS, ENTÃO GOSTARIAMOS QUE GRAFOS ϵ -REGULARES E GRAFOS ALEATÓRIOS POSSUAM PROPRIEDADES EM COMUM.

EX: EM UM GRAFO ALEATÓRIO TODOS OS VÉRTICES POSSUEM BASICAMENTE O MESMO GRAU.

↳ I.E. FIXE $v \in V(G_{n,p})$. TEMOS QUE $\mathbb{E}(d(v)) = p \cdot (n-1)$
E $\text{Var}(d(v)) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = (n-1)p(1-p)$

LOGO, USANDO CHEBYCHEV TEMOS

$$\mathbb{P}(|d(v) - p(n-1)| > \lambda \text{Var}(d(v))) < \frac{1}{\lambda^2}$$

↑ NOTE QUE NÃO
PRECISAMOS SABER
A VARIÂNCIA.

PROPRIEDADE 1. SEJA (A, B) UM PAR ϵ -REGULAR DE DENSIDADE d EM UM GRAFO G ENTÃO TODOS, EXCETO NO MÁXIMO $2\epsilon|A|$, VÉRTICES DE A TÊM GRAU ENTRE $(d-\epsilon)|B|$ E $(d+\epsilon)|B|$ EM $G[A, B]$.

PROVA: SEJA $X \subseteq A$ O CONJUNTO DE VÉRTICES DE GRAU BAIXO EM A

$$X = \{v \in A : |N_G(v) \cap B| < (d-\epsilon)|B|\}$$

ENTÃO A DENSIDADE DO PAR (X, B) É

$$\frac{e(X, B)}{|X||B|} < \frac{|X|(d-\epsilon)|B|}{|X||B|} = (d-\epsilon).$$

Logo, $\left| \frac{e(X, B)}{|X||B|} - d \right| > \epsilon$

PELA DEFINIÇÃO DE ϵ -REG., COMO $|B| \geq \epsilon|A|$ ENTÃO $|X| < \epsilon|A|$. POR SIMETRIA, HÁ MENOS QUE $\epsilon|A|$ VÉRTICES COM GRAU ALTO EM A . LOGO, HÁ MENOS QUE $2\epsilon|A|$ VÉRTICES CUJO GRAU NÃO ESTÁ ENTRE $(d-\epsilon)|B|$ E $(d+\epsilon)|B|$. ■

~ OUTRA PROPRIEDADE INTERESSANTE DE $G_{m,p}$ É QUE UM SUBGRÁFO ALEATÓRIO INDUZIDO DE $G_{m,p}$ É TAMBÉM UM GRÁFO ALEATÓRIO COM MESMA DENSIDADE.

PROPRIEDADE 2. SEJA (A, B) UM PAR ϵ -REGULAR DE DENSIDADE d EM UM GRÁFO G . SE $X \subseteq A$ E $Y \subseteq B$, COM $|X| \geq \delta |A|$ E $|Y| \geq \delta |B|$, ENTÃO (X, Y) É UM PAR $\frac{2\epsilon}{\delta}$ -REGULAR COM DENSIDADE ENTRE $d - \epsilon$ E $d + \epsilon$.

PROVA. PELA DEF. DE ϵ -REG. TEMOS $\left| \frac{e(A, B)}{|A||B|} - \frac{e(X, Y)}{|X||Y|} \right| \leq \epsilon$

LOGO, A DENSIDADE DE (X, Y) , $\frac{e(X, Y)}{|X||Y|}$ É TAL QUE

$$d - \epsilon \leq \frac{e(X, Y)}{|X||Y|} \leq d + \epsilon. \quad (1)$$

SEJAM $Z \subseteq X$ E $W \subseteq Y$ T.q. $|Z| \geq \frac{2\epsilon}{\delta} |X|$ E $|W| \geq \frac{2\epsilon}{\delta} |Y|$
NOTE QUE

$$|Z| \geq \frac{2\epsilon}{\delta} |X| \geq 2\epsilon |A| \text{ E } |W| \geq \frac{2\epsilon}{\delta} |Y| \geq 2\epsilon |B|$$

LOGO, PELA DEF. DE ϵ -REG.

$$\left| \frac{e(Z, W)}{|Z||W|} - \frac{e(A, B)}{|A||B|} \right| \leq \epsilon$$

$$\text{i.e. } d - \epsilon \leq \frac{e(Z, W)}{|Z||W|} \leq d + \epsilon \quad (2)$$

$$\text{NOTE QUE DE (1) OBTENHAMOS } -d + \epsilon \geq -\frac{e(X, Y)}{|X||Y|} \geq -d - \epsilon.$$

$$\text{ASSIM, } -2\epsilon \leq \frac{e(Z, W)}{|Z||W|} - \frac{e(X, Y)}{|X||Y|} \leq 2\epsilon. \quad \square$$

→ O **LEMA DE IMERSÃO** DIZ QUE COM INTUITO DE ENCONTRAR GRAFOS PEQUENOS EM UM GRAFO G , PODEMOS TRATAR PARES E -REGULARES **DENSOS** COMO GRAFOS BIPARTIDOS COMPLETOS.

DEF: DADO GRAFO H E INTEIRO m , DENOTAMOS POR $H(m)$ O GRAFO OBTIDO POR **BLOW UP** CADA VÉRTICE DE H AO TAMANHO m , I.E. CADA VÉRTICE $j \in V(H)$ É SUBSTITUÍDO POR UM CONJUNTO A_j DE TAMANHO m , E CADA ARESTA $ij \in E(H)$ É SUBSTITUÍDA PELO GRAFO BIPARTIDO COMPLETO COM PARTES A_i E A_j . EM OUTRAS PALAVRAS:

$$V(H(m)) = \bigcup_j A_j, \quad E(H(m)) = \{uv : u \in A_i, v \in A_j \text{ e } ij \in E(H)\}.$$

DEF. DADO UM GRAFO H , UM INTEIRO m E $\delta > \epsilon > 0$, DENOTE POR $\mathcal{G}(H, m, \epsilon, \delta)$ A FAMÍLIA DE GRAFOS G TAIS QUE

$V(G) = V(H(m))$, $G \subseteq H(m)$, E $G[A_i, A_j]$ É ϵ -REGULAR E TEM DENSIDADE PELO MENOS δ SEMPRE QUE $ij \in E(H)$.

EM OUTRAS PALAVRAS, $\mathcal{G}(H, m, \epsilon, \delta)$ É A FAMÍLIA DE SUBGRAFOS GERADORES DE BLOW-UPS $H(m)$.

LEMA DE IMERSÃO (VERSÃO SIMPLES).

SEJA H UM GRAFO, E SEJA $\delta > 0$. EXISTE $\epsilon > 0$ E $M \in \mathbb{N}$ TAL QUE SE $m \geq M$ E $G \in \mathcal{G}(H, m, \epsilon, \delta)$, ENTÃO $H \subseteq G$.

LEMA DE IMERSÃO

SEJA $\Delta \in \mathbb{N}$, SEJA $\delta > 0$, E SEJA $\varepsilon_0 = \frac{\delta}{\Delta+2}$.

SEJA R UM GRAFO, SEJA $m, t \in \mathbb{N}$ COM $t \leq \varepsilon_0 m$, E SEJA $H \subseteq R(t)$ COM GRAU MÁXIMO NO MÁXIMO Δ .

SE $\varepsilon_0 > \varepsilon > 0$ E $G \in \mathcal{G}(R, m, \varepsilon, \delta + \varepsilon)$, ENTÃO G CONTÉM PELO MENOS $(\varepsilon_0 m)^{1/(1/\Delta)}$ CÓPIAS DE H .
↓ DENSIDADE MAIOR QUE ε .

PROVA. VAMOS PROVAR O LEMA NO CASO $H = K_3$

NOTE QUE SE $H \subseteq R(t)$, ENTÃO $H \subseteq R$.

SEJA $G \in \mathcal{G}(K_3, m, \varepsilon, \delta)$.

ESCOLHA $v_1 \in A_1$, UM VÉRTICE COM PELO MENOS $(\delta - \varepsilon)m$ VIZINHOS EM AMBOS A_2 E A_3 . (EXISTE PELA PROPRIEDADE 1).

SEJA $X = N(v_1) \cap A_2$ E $Y = N(v_1) \cap A_3$.

NOTE QUE $\Delta \geq 1$, ENTÃO $\varepsilon_0 = \frac{(\delta - \varepsilon)^\Delta}{\Delta + 2} \leq \frac{\delta - \varepsilon}{3}$. LOGO $\delta \varepsilon \geq 3 \varepsilon_0 > \varepsilon$

COMO $|X| \geq (\delta - \varepsilon)m \geq \varepsilon |A_2|$ E $|Y| \geq (\delta - \varepsilon)m \geq \varepsilon |A_3|$, HÁ PELO MENOS UMA ARESTA $xy \in G[X, Y]$. LOGO v_1, xy É UM TRIÂNGULO EM G .

NA VERDADE, PELA PROPRIEDADE 2, (X, Y) É UM PAR ε' -REGULAR COM $\varepsilon' = \frac{2\varepsilon}{\delta - \varepsilon}$ COM DENSIDADE PELO MENOS $\delta - \varepsilon$.

PELA PROPRIEDADE 1, TODOS, EXCETO NO MÁXIMO $2\varepsilon' |X|$, OS VÉRTICES TEM GRAU PELO MENOS $(\delta - 2\varepsilon) |Y|$.

ISSO É, HÁ $\varepsilon |A_2| - 2\varepsilon' \cdot \varepsilon |A_2|$ OPÇÕES PARA v_2 , E $(\delta - 2\varepsilon) \varepsilon |A_3|$ OPÇÕES PARA v_3 .

ALÉM DE $|A_1| - 2(2\varepsilon |A_1|)$ OPÇÕES PARA v_1 , □

DIZEMOS QUE OS GRAFOS EM UMA SEQUÊNCIA $G_1, G_2, \dots$, T.q. $|G_n| = n$ SÃO ESPARSOS (RESP. DENSOS) SE A FUNÇÃO $f(n) = e(G_n)$ É $f(n) = O(n^2)$ (RESP. $f(n) = \Omega(n^2)$).

↳ NÃO HÁ UMA DEFINIÇÃO FORMAL DE GRAFO ESPARSO OU DENSO.

LEMA DE REGULARIDADE DE SZEMERÉDI.

SEJA $\varepsilon > 0$, E SEJA $m \in \mathbb{N}$. EXISTE UMA CONSTANTE $M = M(m, \varepsilon)$, TAL QUE VALE O SEGUINTE.

PARA QUALQUER GRAFO G EXISTE UMA PARTIÇÃO

$$V(G) = A_0 \cup \dots \cup A_K$$

DOS VÉRTICES DE G EM $k+1$ PARTES COM $m \leq k \leq M$ TAL QUE

1) $|V_1| = |V_2| = \dots = |V_K|$

$$2) |A_0| \leq \varepsilon |V(G)|$$

3) TODOS OS PARES (A_i, A_j) , EXCETO NO MÁXIMO E_{K^2} , SÃO ϵ -REGULARES.

→ APESAR DE VALER PARA TODOS OS GRAFOS, SÓ É ÚTIL PARA GRAFOS DENSOS.

$\leadsto$ SE $n = |V(G)| < M(m, \varepsilon)$, O ENUNCIADO VÁLÉ POR VACUIDADE, COM CADA PARTE TENDO TAMANHO NO MÁXIMO 1; E SE $e(G) = o(m^2)$, G PODE SER BEM APROXIMADO PELO GRUPO VAZIO.

→ O MELHOR VALOR PARA $M(m, \varepsilon)$ ENCONTRADO ATÉ HOJE É
UMA TORRE DE ALTURA $f(\varepsilon)$ COM $\log(1/\varepsilon) \leq f(\varepsilon) \leq (1/\varepsilon)^5$

$$\left. \begin{matrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{matrix} \right\} f(x)$$

TEOREMA DE ERDŐS-STONE.

SEJA H UM GRAFO. ENTÃO

$$ex(n, H) = \left(1 - \frac{1}{\chi(H) - 1} + o(1) \right) \binom{n}{2}$$

PASSOS PADRÕES PARA USAR O LEMA DE REGULARIDADE DE SZEMERÉDI (SZRL)

1. APLIQUE SZRL (PARA UM $\epsilon > 0$ SUFICIENTEMENTE PEQUENO).
OBTENHAMOS UMA PARTIÇÃO $(A_0, \dots, A_k)$ DE $V(G)$.

2. REMOVA AS ARESTAS DENTRO DAS PARTES, ENTRE PARES IRREGULARES,
E ENTRE PARES ESPARSOS. HÁ NO MÁXIMO $O(\epsilon n^2)$ DESSAS ARESTAS

3. CONSIDERE O "GRAFO REDUZIDO" R TAL QUE $V(R) = [k]$ E

$$E(R) = \{ij : (A_i, A_j) \text{ É UM PAR } \epsilon\text{-REGULAR DENSO}\}$$

4. APLIQUE ALGUM RESULTADO EM TEORIA DOS GRÁFOS EM R .

5. USE O LEMA DE IMERSÃO PARA ENCONTRAR UMA CÓPIA DO
SUBGRAFO DESEJADO H EM G .

TEOREMA DE ERDŐS-STONE.

PARA TODO $\delta > 0$ EXISTE $N(\delta) \in \mathbb{N}$ TAL QUE SE $n \geq N(\delta)$,
 $|G_n| = n$ E

$$e(G) \geq \left(1 - \frac{1}{\chi(H) - 1} + \delta \right) \binom{n}{2}$$

ENTÃO $H \subseteq G$.

PROVA: SEJA G UM GRAFO COMO NO ENUNCIADO, SEJA $\varepsilon = \varepsilon(H, \delta) > 0$ SUFICIENTEMENTE PEQUENO, E SEJA $m = 1/\varepsilon$.

PELO SZRL, TEMOS UMA PARTIÇÃO $A_1, \dots, A_k$, DA QUAL OBTÉMOS O GRAFO REDUZIDO R .

AFIRMAÇÃO:
$$e(R) > \left(1 - \frac{1}{K(R)-1} + \frac{\delta}{2}\right) \frac{K^2}{2}$$

PROVA DA AF: CONSIDERE AS ARESTAS DENTRO DAS PARES, ENTRE PARES IRREGULARES, E ENTRE PARES COM DENSIDADE NO MÁXIMO $\delta/4$.

AFIRMAMOS QUE HÁ NO MÁXIMO $\frac{\delta}{3} \binom{m}{2}$ TAIS ARESTAS

a) HÁ NO MÁXIMO $K(m/K)^2$ ARESTAS DENTRO DAS PARTES.
TEMOS QUE $K \geq m > 1/\varepsilon$. $\Rightarrow \varepsilon m^2 < \varepsilon \cdot 4 \binom{m}{2}$

b) HÁ NO MÁXIMO $\varepsilon K^2 \left(\frac{m}{K}\right)^2$ ARESTAS ENTRE PARES IRREGULARES.

c) HÁ NO MÁXIMO $\binom{K}{2} \left(\frac{\delta}{4}\right) \left(\frac{m}{K}\right)^2$ ARESTAS ENTRE PARES "ESPARSOS".
 $< \frac{\delta}{4} \binom{m}{2}$

$\Rightarrow$ ESCOLHEMOS $\varepsilon(H, \delta)$ T.q. $\frac{\delta}{4} + 8\varepsilon < \frac{\delta}{3}$

AS ARESTAS RESTANTES NOS DÃO UM GRAFO $G' \subseteq G$ T.q.

$$e(G') > \left(1 - \frac{1}{K(H)-1} + \frac{2\delta}{3}\right) \binom{m}{2}$$

NOTE QUE AS ARESTAS DE G' LIGAM PARES CORRESPONDENTES ÀS ARESTAS DE R . LOGO

$$e(G') \leq e(R) \left(\frac{m}{K}\right)^2$$

Logo

$$\begin{aligned} e(R) &> \left(1 - \frac{1}{\chi(H)-1} + \frac{2\delta}{3}\right) \frac{n(n-1)}{2} \cdot \frac{k^2}{n^2} \\ &> \underbrace{\left(1 - \frac{1}{\chi(H)-1} + \frac{2\delta}{3}\right)}_{> \delta/2} \frac{k^2}{2} \end{aligned}$$

□

TURÁN: O GRÁFO COM k VÉRTICES É SEM K_r COM MAIOR NÚMERO DE ARESTAS É O T_{r-1} .

LEMBREMOS QUE T_{r-1} É UM GRÁFO COM $r-1$ PARTES CONTENDO $n/r-1$ CADA, E QUE CADA VÉRTICE É VIZINHO DE TODOS OS OUTROS, EXCETO OS VÉRTICES DE SUA PRÓPRIA PARTE.

LOGO $d_{T_{r-1}}(v) = n - \frac{n}{r-1} \forall v$, O QUE IMPLICA QUE

$$e(T_{r-1}) = \frac{n}{2} \left(n - \frac{n}{r-1} \right) = \frac{n^2}{2} \left(1 - \frac{1}{r-1} \right)$$

COMO R POSSUI k VÉRTICES, PELO TEO. DE TURÁN R CONTÉM UMA CÓPIA DE K_r , ONDE $r = \chi(H)$.

SEJAM $i(1), \dots, i(r)$ OS RÓTULOS DAS PARTES A_i QUE FORAM "REDUZIDAS" AOS VÉRTICES DE K_r , E SEJA

$$A = \bigcup_{j=1}^r A_{i(j)}$$

ENTÃO $G[A] \in \mathcal{G}\left(K_r, \frac{n}{k}, \varepsilon, \delta/4\right)$. ALÉM DISSO, COMO H É FIXO E $\chi(H) = r$, ENTÃO $H \subseteq R(t)$ PARA $t = |H|$. PELO LEMA DE IMERÇÃO $H \subseteq G' \subseteq G$.

□

O LEMA DE REMOÇÃO DE TRIÂNGULOS. (RUSA E SZEMERÉDI, 1976)

PARA TODO $\epsilon > 0$ EXISTE $\delta > 0$ TAL QUE VALE O SEGUINTE:

SE G É UM GRAFO COM NO MÁXIMO δn^3 TRIÂNGULOS, ENTÃO TODOS OS TRIÂNGULOS EM G PODER SER DESTRUÍDOS PELA REMOÇÃO DE ϵn^2 ARESTAS.

PROVA: DA MESMA FORMA QUE FIZEMOS NA PROVA DO TEO. DE ERDŐS-STONE, APLICAMOS O SZRL COM $\epsilon' = \epsilon'(\epsilon, \delta)$ E $m = 1/\epsilon'$.

1) OBTENEMOS UMA PARTIÇÃO $V(G) = A_0 \cup A_1 \cup \dots \cup A_k$.

2) VAMOS GERAR O GRAFO $G' \subseteq G$ PELA REMOÇÃO DE ALGUMAS ARESTAS

a) $\epsilon' m^2$ ARESTAS COM POUCO MENOS UMA PONTA EM A_0
 $\leadsto$ PORQUE $|A_0| \leq \epsilon' m$, E CADA VÉRTICE DE A_0 TEM GRAU $< m$.

b) $\epsilon' k^2 \left(\frac{m}{k}\right)^2$ ARESTAS ENTRE PARES IRREGULARES
 $\leadsto$ HÁ NO MÁXIMO $\epsilon' k^2$ TALS PARES.
 $\leadsto$ CADA PAR POSSUI NO MÁXIMO $\left(\frac{m}{k}\right)^2$ ARESTAS

c) $k \left(\frac{m}{k}\right)^2$ ARESTAS DENTRO DAS CLASSES $A_1, \dots, A_k$
 $\leadsto$ CADA CLASSE POSSUI NO MÁXIMO $\binom{m/k}{2} \leq \left(\frac{m}{k}\right)^2$ ARESTAS

d) $\binom{k}{2} \delta \left(\frac{m}{k}\right)^2$ ARESTAS ENTRE PARES COM DENSIDADE $\leq \delta$

AO TODO REMOVIEMOS $\epsilon' m^2 + \epsilon' m^2 + \frac{m^2}{k} + \binom{k}{2} \delta \left(\frac{m}{k}\right)^2$
COMO $k \geq m = \frac{1}{\epsilon}$ E $\binom{k}{2} \leq \frac{k^2}{2}$, REMOVIEMOS

$$\leq \left(3\epsilon' + \frac{\delta}{2}\right) m^2 \text{ ARESTAS}$$
$$\leq \epsilon m^2$$

(PORQUE PODEMOS SUBIR
 ϵ' TQ. $3\epsilon' + \delta \leq \epsilon$)

3) SEJA R O GRAFO REDUZIDO.

→ AS ARESTAS DE R CORRESPONDEM AOS PARES ε' -REGULARES COM DENSIDADE MAIOR QUE d .

SE R NÃO POSSUI TRIÂNGULOS, ENTÃO O ENUNCIADO SEGUIRÁ.
SUPONHA ENTÃO QUE R POSSUI UM TRIÂNGULO

4) USANDO O LEMA DE CONTAGEM:

SE R POSSUI TRIÂNGULO, ENTÃO $R(t)$ POSSUI TRIÂNGULO PARA TODO $t \geq 1$.

SEJAM x, y, z OS VÉRTICES DE UM TRIÂNGULO DE R , E SEJAM A_x, A_y, A_z AS PARTES DE G' CORRESPONDENTES.

NOTE QUE $G'[A_x \cup A_y \cup A_z] \in g(K_3, \frac{m}{K}, \varepsilon', d)$

COMO $\varepsilon_0 = \frac{(d - \varepsilon')^2}{4} > \varepsilon'$ E $1 = t < \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon'} = \varepsilon_0 m$ (PORQUE PODEMOS ESCOLHER ε')

PELO LEMA DE CONTAGEM, G' POSSUI PELO MENOS

$$(\varepsilon_0 m)^3 \geq \varepsilon_0^3 \cdot n^3 \quad \text{TRIÂNGULOS}$$

↓
PORQUE PODEMOS SUPOR QUE n É SUF. GRANDE

ASSIM, SE DEFINIRMOS $S = \varepsilon_0^3$, TEMOS QUE G' POSSUI MAIS DO QUE $S n^3$ TRIÂNGULOS, UMA CONTRADIÇÃO. $\square$

TEOREMA DE ROTH

SE $A \subseteq \mathbb{N}$ TEM DENSIDADE SUPERIOR POSITIVA, ENTÃO A POSSUI PROGRESSÃO ARITMÉTICA DE COMPRIMENTO 3.

PROVA: DADO A , SEJA $\varepsilon > 0$ T.q. $\varepsilon < \bar{d}(A)$.

SEJA n T.q. $|A \cap [n]| > \varepsilon n$.

→ SEJAM X, Y, Z TRÊS CÓPIAS DE $[n]$

→ SEJA G O GRÁFO T.q.

- $V(G) = X \cup Y \cup Z$

- $E(G) = \{xy : x \in X, y \in Y \text{ e } y = x + a, \text{ com } a \in A\}$
 $\cup \{yz : y \in Y, z \in Z \text{ e } z = y + a, \text{ com } a \in A\}$
 $\cup \{xz : x \in X, z \in Z \text{ e } z = x + 2a, \text{ com } a \in A\}$

NOTE QUE HÁ DOIS TIPOS DE TRIÂNGULOS EM G

1) xyz COM $y = x + a, z = y + a = x + 2a$

⇒ NÃO CORRESPONDEM A PA'S EM A .

2) xyz COM $y = x + a_1, z = y + a_2 = x + a_1 + a_2$ COM $a_1 \neq a_2 \in A, a_3 = \frac{a_1 + a_2}{2}$

→ A POSSUI PA SE E SOMENTE SE HÁ TRIÂNGULO DO TIPO 2 EM G .

→ CADA TRIÂNGULO DO TIPO 1 CORRESPONDE A UM PAR $(x, a) \in X \times A$

LOGO, HÁ NO MÁXIMO $n \cdot |A \cap [n]| \leq n^2$ TAIS TRIÂNGULOS.

→ SÃO ARESTAS DISJUNTOS

- SUPONHA QUE G CONTÉM APENAS TRIÂNGULOS DO TIPO 1.

→ SEJA $\delta = \delta(\varepsilon)$ DADO PELO LEMA DE REMOÇÃO DE TRIÂNGULOS.

⇒ SE G POSSUI NO MÁXIMO δn^3 TRIÂNGULOS, ENTÃO PODEMOS REMOVER

TODOS OS TRIÂNGULOS DE G REMOVENDO εn^2 ARESTAS

- SE n É SUFICIENTEMENTE GRANDE, ENTÃO $n^2 \leq \delta n^3$

ENTÃO PODEMOS REMOVER TODOS OS TRIÂNGULOS DE G DELETANDO

εn^2 ARESTAS. COMO OS TRIÂNGULOS DO TIPO 1 SÃO ARESTAS DISJUNTOS

TEMOS $n|A \cap [n]| \leq \varepsilon n^2$ TRIÂNGULOS ⇒ $|A \cap [n]| \leq \varepsilon$, UMA CONTRADIÇÃO

NÚMEROS DE RAMSEY-TURÁN

→ NÚMERO DE RAMSEY $K_r \times K_s$:

$R(r,s)$ = MENOR INTEIRO m T.q. TODA 2-COLORAÇÃO DE K_m POSSUI UM K_r AZUL OU K_s VERMELHO

EQUIV $\Rightarrow$ MENOR INTEIRO m T.q. SE G POSSUI m VÉRTICES, ENTÃO $K_r \subseteq G$ OU $K_s \subseteq \bar{G}$.

→ NÚMERO DE TURÁN K_r :

$ex(m, K_r)$ = MAIOR NÚMERO DE ARESTAS DE UM GRAFO COM m VÉRTICES E QUE NÃO POSSUI CÓPIA DE K_r .

$$= e(T_{r-1}(m)) = \left(1 - \frac{1}{r-1}\right) \frac{m^2}{2}$$

→ OS GRAFOS DE TURÁN POSSUEM CONJUNTOS INDEPENDENTES MUITO GRANDES : $\lceil m/r \rceil$.

PERGUNTA: O QUE ACONTECE COM O NÚMERO EXTREMA QUANDO EXIGIMOS QUE O GRAFO NÃO POSSUA CONJ. INDEPENDENTE GRANDE?

PROPOSIÇÃO: SEJA G UM GRAFO LIVRE DE K_3 E COM NÚMERO DE INDEPENDÊNCIA NO MÁXIMO $f(m)$.
SE $f(m) = o(m)$, ENTÃO $e(G) = o(m^2)$.

PROVA: NOTE QUE $N(v)$ É UM CONJUNTO INDEPENDENTE $\forall v \in V(G)$,
LOGO $d(v) \leq f(m)$ E $e(G) = \frac{1}{2} \sum d(v) \leq \frac{m}{2} f(m) = o(m^2)$. $\square$

→ É POSSÍVEL GENERALIZAR ESSE RESULTADO PARA GRAFOS LIVRES DE K_r ?

PROPOSIÇÃO: SEJA $r \geq 5$ E $f(m) = o(m)$.

EXISTE GRAFO G COM m VÉRTICES, LIVRE DE K_r
COM $K(G) < f(m)$ E T.q. $e(G) = \Omega(m^2)$.

PROVA: VIMOS QUE DADO $g \geq 4$, EXISTE GRAFO $H(g, f(m))$ COM GNTURA
PELO MENOS g E NÚMERO DE INDEPENDÊNCIA PELO MENOS $f(m)$
(E, PORTANTO, NÚMERO CROMÁTICO ALTO).

CONSIDERE O GRAFO G OBTIDO DE $T_{\lfloor \frac{r-1}{2} \rfloor}(m)$ AO
COLOCARMOS UMA CÓPIA DE $H(g, f(m))$ EM CADA PARTE DE $T_{\lfloor \frac{r-1}{2} \rfloor}(m)$.
TEMOS QUE

$$e(G) \geq e(T_{\lfloor \frac{r-1}{2} \rfloor}) = \left(1 - \frac{1}{\lfloor \frac{r-1}{2} \rfloor}\right) \frac{m^2}{2}$$

ALÉM DISSO, G É LIVRE DE K_r . DE FATO, SE G POSSUI UMA
CÓPIA K DE K_r , ENTÃO HÁ UMA PARTIÇÃO A_i DE $T_{\lfloor \frac{r-1}{2} \rfloor}$ QUE
CONTÉM PELO MENOS TRÊS VÉRTICES, DIGAMOS x, y, z DE K .
MAS ENTÃO $G[\{x, y, z\}]$ É UM TRIÂNGULO, O QUE É UM
ABSURDO, PORQUE $G[A_i]$ TEM GNTURA PELO MENOS 4. $\square$

DEF: DADO UM GRAFO PROIBIDO H E UMA FUNÇÃO $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, DEFINIMOS
O NÚMERO DE RAMSEY-TURÁN DO PAR (H, f) COMO SEGUE:

$$RT(m, H, f(m)) = \max \{e(G) : |G| = m, H \not\subseteq G \text{ E } K(G) \leq f(m)\}$$

$\leadsto$ VIMOS QUE $RT(m, K_r, o(m))$ É $O(m^2)$ SE $r \leq 3$ E $\Theta(m^2)$ SE $r \geq 5$.

$\leadsto$ E PARA $r=4$?

TEOREMA (SZEMERÉDI, 1972; BOLLOBÁS - ERDŐS, 1976):

$$RT(n, K_4, o(n)) = \frac{n^2}{8} + o(n^2)$$

PROVA: SEGUINDO A MESMA ESTRATÉGIA.

USAMOS SRL COM UM $\epsilon > 0$ SUFICIENTEMENTE PEQUENO, E $m = ?$

OBTENEMOS O GRÁFO REDUZIDO R DOS PARES ϵ -REGULARES COM DENSIDADE PLO MENOS δ .

AF1: R É LIVRE DE TRIÂNGULOS

PROVA: SEJA A, B, C AS PARTES DE G CORRESPONDENTES AO TRIÂNGULO DE R .

$\leadsto$ SEJA $a \in A$ T.Q. $|N(a) \cap B| \geq \delta/2 |B|$, $|N(a) \cap C| \geq \delta/2 |C|$
(PELA PROP. 1. A MAIORIA DOS VÉRTICES TÊM GRAU PLO MENOS $(\delta - \epsilon)|B|$.)

COMO PODEMOS ESCOLHER $\epsilon \leq \delta/2$, TEMOS $\delta - \epsilon \geq \delta/2$)

$\leadsto$ COMO O PAR $(N(a) \cap B, N(a) \cap C)$ É ϵ' -REGULAR,
(PELA PROP. 2)

PODEMOS ESCOLHER VÉRTICE $b \in N(a) \cap B$ T.Q.

$$|N(b) \cap N(a) \cap C| \geq \left(\frac{\delta}{2}\right)^2 |C|$$

$\leadsto$ COMO $\alpha(G) = o(n)$ E $\left(\frac{\delta}{2}\right)^2 |C| = \Omega(n)$,

TEMOS QUE $N(b) \cap N(a) \cap C$ NÃO É UM CONJUNTO INDEPENDENTE,
I.E., EXISTE $c, d \in N(b) \cap N(a) \cap C$ T.Q. $cd \in E(G)$.

LOGO, a, b, c, d INDUZEM UM K_4 EM G . □

AF2: G NÃO POSSUI PAR ϵ -REG. COM DENSIDADE MAIOR QUE $\frac{1}{2} + \delta$.

PROVA: SEJA (A, B) UM TAL PAR.

SEJA $A' \subseteq A$ O CONJUNTO DE VÉRTICES COM GRAU EM (A, B) PLO MENOS $(\frac{1}{2} + \delta/2) |B|$. $|A'| \geq (1 - \epsilon) |A| = \Omega(n)$.

COMO $\alpha(G) = o(n)$, HÁ $xy \in E(G)$ COM $x, y \in A'$.

MAS ENTÃO $|N(x) \cap N(y) \cap B| \geq \delta |B|$.

NOVAMENTE, COMO $\alpha(G) = o(n)$, $N(x) \cap N(y) \cap B$ CONTÉM UMA ARESTA

□

~ O resultado segue ao contar as arestas.

~ Há no máximo

$$\frac{k^2}{4} \left(\frac{1}{2} + \epsilon \right) \left(\frac{m}{k} \right)^2 = \frac{m^2}{8} + o(m^2)$$

Arestas entre pares densos, e $o(m^2)$ outras arestas.

A PROVA DO LEMA DE REGULARIDADE

PROP A. TODO PAR X, Y COM $d(X, Y) \leq \varepsilon^3$ É ε -REGULAR

PROVA: SEJAM $X' \subseteq X$ E $Y' \subseteq Y$ COM $|X'| \geq \varepsilon |X|$ E $|Y'| \geq \varepsilon |Y|$.
NOTE QUE

$$d(X', Y') = \frac{e(X', Y')}{|X'| |Y'|} \leq \frac{e(X, Y)}{|X'| |Y'|} \leq \frac{\varepsilon^3 |X| |Y|}{\varepsilon |X| \varepsilon |Y|} = \varepsilon$$

□

PROP: SE $e(G) \leq \varepsilon^4 n^4$, ENTÃO SZRL VALE PARA G

PROVA: SEJA $V_0 \cup V_1 \cup \dots \cup V_k$ UMA PARTIÇÃO QUALQUER.

PELA PROP A, TODO PAR COM DENSIDADE NO MÁXIMO ε^3 É ε -REGULAR.

SEJA (V_i, V_j) UM PAR COM $d(V_i, V_j) > \varepsilon^3$. TEMOS

$$e(V_i, V_j) > \varepsilon^3 |V_i| |V_j| = \frac{\varepsilon^3}{k^2} n^2$$

COMO HÁ NO MÁXIMO $\varepsilon^4 n^4$ ARESTAS EM G , HÁ NO MÁXIMO εk^2 TAIS PARES. LOGO, G É ε -REGULAR.

DEF: A MÉDIA QUADRADA DE UMA PARTIÇÃO $\Pi = \{V_1, \dots, V_k\}$ É

$$d_2(\Pi) = \sum_{1 \leq i < j \leq k} \frac{|V_i| |V_j|}{n^2} d(V_i, V_j)^2$$

DEF: UMA PARTIÇÃO Π' REFINA UMA PARTIÇÃO Π SE TODA PARTE DE Π É A UNIÃO DE PARTES DE Π'

LEMA 6: SEJA G UM GRAFO COM n VÉRTICES. ENTÃO

(i) PARA QUALQUER PARTIÇÃO π , TEMOS $0 \leq d_2(\pi) \leq \frac{1}{2}$

(ii) SE π' REFINA π , ENTÃO $d_2(\pi') \geq d_2(\pi)$

PROVA: (i) $0 \leq \sum_{i,j} \frac{|V_i||V_j|}{n^2} = \frac{1}{n^2} \sum_{i,j} |V_i||V_j| \leq \frac{1}{n^2} \binom{n}{2} \leq \frac{1}{n^2} \cdot \frac{1}{2} n^2 = \frac{1}{2}$
 ALÉM DISSO, $0 \leq d(v_i, v_j) \leq 1$ □

(ii) SE $X = X_1 \cup X_2$ E $Y = Y_1 \cup Y_2$, ENTÃO

$$e(X, Y) = \sum_{i,j=1}^2 e(X_i, Y_j)$$

ASSIM, $|X||Y|d(X, Y) = \sum_{i,j=1}^2 |X_i||Y_j|d(X_i, Y_j)$

PELA DES. DE CAUCHY-SCHWARTZ $(\langle u, v \rangle)^2 \leq \langle u, u \rangle \langle v, v \rangle$

$$d(X, Y)^2 = \left(\sum_{i,j=1}^2 \frac{|X_i||Y_j|}{|X||Y|} d(X_i, Y_j) \right)^2 \leq \sum_{i,j=1}^2 \frac{|X_i||Y_j|}{|X||Y|} d(X_i, Y_j)^2$$

LEMA 7. SUPONHA QUE $X = X_1 \cup X_2$, $Y = Y_1 \cup Y_2$, ONDE $|X_1| \geq \varepsilon |X|$, $|Y_1| \geq \varepsilon |Y|$ E $|d(X_1, Y_1) - d(X, Y)| \geq \varepsilon$, ENTÃO

$$\sum_{i,j=1}^2 \frac{|X_i||Y_j|}{|X||Y|} d(X_i, Y_j)^2 \geq d(X, Y) + \underbrace{\frac{1}{2} \varepsilon^5}_{\text{PODE FICAR } \varepsilon^4}$$

PROVA: NOTE QUE TEMOS

$$\begin{aligned} \varepsilon^4 &\leq \sum_{i,j=1}^2 \frac{|X_i||Y_j|}{|X||Y|} (d(X_i, Y_i) - d(X, Y))^2 \\ &\stackrel{\substack{\uparrow \\ \text{POE CAUCHY} \\ \text{DE } i,j=1}}}{=} \sum_{i,j=1}^2 \frac{|X_i||Y_j|}{|X||Y|} d(X_i, Y_j)^2 - 2d(X, Y) \sum_{i,j=1}^2 \frac{|X_i||Y_j|}{|X||Y|} d(X_i, Y_j) + d(X, Y)^2 \\ &= \sum_{i,j=1}^2 \frac{|X_i||Y_j|}{|X||Y|} d(X_i, Y_j)^2 - d(X, Y)^2 \end{aligned}$$

COMO $\varepsilon^4 \geq \frac{1}{2} \varepsilon^5$ QUANDO $\varepsilon \leq 2$, TEMOS O RESULTADO. □

DADA UMA PARTIÇÃO $\Pi = V_0 \cup \dots \cup V_K$, VEMOS Π COMO UMA PARTIÇÃO CONSISTINDO DE $|V_0| + K$ PARTES (CADA VÉRTICE DE V_0 É SUA PRÓPRIA PARTE).
DEFINIMOS $|\Pi| = K$

LEMA 8: SE $\Pi = V_0 \cup \dots \cup V_K$ NÃO É UMA PARTIÇÃO ϵ -REG., ENTÃO HÁ UM REFINAMENTO Π' DE Π SATISFAZENDO

$$1) d_2(\Pi') \geq d_2(\Pi) + \epsilon^5$$

$$2) |\Pi'| \leq |\Pi| \cdot 2^{|\Pi|}$$

PROVA: SE Π NÃO É ϵ -REGULAR, HÁ PELO MENOS ϵK^2 PARES (V_i, V_j) PARA OS QUAIS EXISTEM SUBCONJUNTOS $V_i^{(1)} \subseteq V_i$ E $V_j^{(1)} \subseteq V_j$ COM $|V_i^{(1)}| \geq \epsilon |V_i|$, $|V_j^{(1)}| \geq \epsilon |V_j|$ E

$$|d(V_i^{(1)}, V_j^{(1)}) - d(V_i, V_j)| > \epsilon$$

$$\text{DEFINA } V_i^{(2)} = V_i \setminus V_i^{(1)}, \quad V_j^{(2)} = V_j \setminus V_j^{(1)}$$

PELO LEMA 7 TEMOS

$$\sum_{k,l=1}^2 \frac{|V_i^{(k)}| |V_j^{(l)}|}{|V_i| |V_j|} d(V_i^{(k)}, V_j^{(l)})^2 \geq d(V_i, V_j)^2 + \epsilon^4$$

MULTIPLICANDO OS DOIS LADOS POR $\frac{|V_i| |V_j|}{n^2}$, OBTÉMOS

$$\sum_{k,l=1}^2 \frac{|V_i^{(k)}| |V_j^{(l)}|}{n^2} d(V_i^{(k)}, V_j^{(l)})^2 \geq \frac{|V_i| |V_j|}{n^2} d(V_i, V_j)^2 + \frac{|V_i| |V_j|}{n^2} \epsilon^4$$

NOTE QUE CADA V_i PODE ESTAR EM NO MÁXIMO K PARES NÃO REG.

DEFINIMOS UM REFINAMENTO COMUM $V_i = V_{i,1} \cup \dots \cup V_{i,k_i}$,
ONDE $x, y \in V_i$ ESTÃO NA MESMA PARTE $V_{i,r}$ SE ESTÃO NA
MESMA PARTE EM TODAS AS PARTIÇÕES ANTERIORES.

ISSO IMPLICA QUE $k_i \leq 2^k$.

ASSIM, O REFINAMENTO Π' DE Π OBTIDO DA PARTIÇÃO
COMUM DE TODAS AS PARTES É T.Q.

$$|\Pi'| \leq |\Pi| 2^{|\Pi|}$$

PELO LEMA 6 APLICADO EM $G[V_i, V_j]$ TEMOS

$$\sum_{a=1}^{k_i} \sum_{b=1}^{k_j} \frac{|V_{i,a}| |V_{j,b}|}{n^2} d(V_{i,a}, V_{j,b})^2 \geq \frac{|V_i| |V_j|}{n^2} d(V_i, V_j)^2 + \frac{|V_i| |V_j|}{n^2} \varepsilon^4$$

COMO HÁ Pelo MENOS εk^2 PARTIÇÕES NÃO-REG, TEMOS

$$d_2(\Pi') \geq d_2(\Pi) + \varepsilon k^2 \cdot \left(\frac{(1-\varepsilon)n}{k} \right)^2 \frac{\varepsilon^4}{n^2} \geq d_2(\Pi) + \varepsilon^5$$

□

TEOREMA (LEMA DE REGULARIDADE DE SZEMEREDI)

PARA TODO ϵ E M , EXISTE $m_0 \in \mathbb{N}$ T.q. PARA TODO $n \geq m_0$, TODO GRAFO G COM n VÉRTICES ADMITE UMA PARTIÇÃO ϵ -REGULAR $V_0 \cup \dots \cup V_k$ COM $m \leq k \leq M$.

PROVA: COMEÇAMOS COM UMA PARTIÇÃO EQUILIBRADA QUALQUER

$$\pi_0 = V_0 \cup V_1 \cup \dots \cup V_k$$

ONDE $|V_0| \leq m-1$. SE π_0 NÃO É ϵ -REG, HÁ UM REFINAMENTO π'_1 DE π_0 COM $d_2(\pi'_1) \geq d_2(\pi_0) + \epsilon^5$ E $A = |\pi'_1| \leq |\pi_0| + 2^{|\pi_0|}$.

PODEMOS TRANSFORMAR π'_1 EM UMA PARTIÇÃO EQUILIBRADA SE PARTICIONARMOS CADA PARTE EM PARTES DE TAMANHO EXATAMENTE $\frac{1}{2} \epsilon^6 \frac{n}{A}$ E UMA PARTE COM TAMANHO MENOR QUE ISSO.

COLOCAMOS TODAS AS MENORES PARTES EM V_0 .

V_0 AUMENTA EM NO MÁXIMO $A \left(\frac{1}{2} \epsilon^6 \frac{n}{A} \right) = \frac{1}{2} \epsilon^6 n$ VÉRTICES.

ISSO NOS DÁ UMA PARTIÇÃO EQUILIBRADA π_1 .

NOTE QUE $|\pi_1| = 1 + \frac{n}{\frac{1}{2} \epsilon^6 \frac{n}{A}} = 1 + \frac{2A}{\epsilon^6}$

PELO LEMA 6, TEMOS $d_2(\pi_1) \geq d_2(\pi'_1) \geq d_2(\pi_0) + \epsilon^5$

REPETIMOS ESSE PROCESSO: $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_k$

NOTE QUE π_k SATISFÁZ

$$d_2(\pi_k) \geq \frac{1}{2} \epsilon^5 (k-1)$$

PELO LEMA 6 (i), TEMOS $d_2(\pi_k) \leq \frac{1}{2}$.

ENTÃO ESSE PROCESSO ACABA EM NO MÁXIMO ϵ^{-5} PASSOS

NOTE QUE V_0 POSSUI NO MÁXIMO $\frac{1}{2} \epsilon^6 n \cdot \epsilon^{-5} < \epsilon n$. $\square$