

# Combinatória Extremal e Probabilística 2021/2

Data da entrega: 05/11/2021

**Questão 1.** Seja  $S_k \simeq K_{1,k}$  a estrela com  $k$  arestas. Qual o número extremal  $\text{ex}(n, S_k)$  de  $S_k$ ? Justifique sua resposta.

**Questão 2.** Seja  $k$  um inteiro positivo, e seja  $P_k$  o caminho com  $k$  vértices.

- (a) Encontre um grafo  $P_k$ -livre com  $2k - 2$  vértices cujo complemento é  $K_3$ -livre.
- (b) Mostre que se um grafo  $G$  possui pelo menos  $2k - 1$  vértices, então  $G$  possui uma cópia de  $P_k$  ou o complemento de  $G$  possui um triângulo.
- (c) Calcule  $r(P_k, K_3)$ .

**Questão 3.** O comprimento de um caminho ou ciclo é o seu número de arestas, e a *distância* entre dois vértices  $u, v$  é o comprimento de um caminho mais curto ligando  $u$  a  $v$ . Dado um grafo  $G$ , a *cintura* de  $G$  é o comprimento de um ciclo mais curto em  $G$ . Além disso, para cada vértice  $u \in V(G)$ , denote por  $d_{=k}(u)$  o número de vértices de  $G$  que estão a uma distância *exatamente*  $k$  de  $u$ ; e por  $d_{\leq k}(u)$  o número de vértices de  $G$  que estão a uma distância *no máximo*  $k$  de  $u$  (incluindo  $u$ ). Em particular,  $d_{=1}(u)$  é precisamente o grau de  $u$  em  $G$ ; e  $d_{\leq 1}(u) = d_{=1}(u) + 1$ .

Seja  $G$  um grafo com cintura  $g = 2r$ . Mostre que

$$\alpha(G) \geq \sum_{u \in V(G)} \frac{d_{=r-1}(u)}{d_{\leq r}(u)}$$

em que  $\alpha(G)$  denota o tamanho do maior conjunto independente de  $G$ .