PRINCÍPIOS E TÉCNICAS BÁSICAS EM COMBINATÓRIA

NOTAÇÃO:

$$[n] = \{1, \ldots, n\} \quad \text{E} \quad [m, n] = \{m, \ldots, n\}$$

DADO CONJUNTO V E INTEIRO $k \geq 0$

BINOM{V}{K}
{V \CHOOSE K}

$$\binom{V}{k} = \{V' \subseteq V : |V'| = k\} \Rightarrow \left|\binom{V}{k}\right| = \binom{|V|}{k}$$

$$= \frac{|V|!}{k!(|V|-k)!}$$

UMA PARTIÇÃO DE V É UMA FAMÍLIA $V_1, \dots, V_k$ DE SUBCONJUNTOS DE V T.q. CADA ELTO DE V ESTÁ EM PRECISAMENTE UM MEMBRO DA FAMÍLIA.

- $V = V_1 \cup \cdots \cup V_k$
- $V_i \cap V_j = \emptyset \quad \forall i, j$

UMA COLORAÇÃO DE V É UMA FUNÇÃO $c : V \to [k]$

Princípio da Casa dos Pombos

→ Se há $n+1$ pombos em n casas, então há uma casa com pelo menos dois pombos.

→ Dados inteiros n e k, em toda partição $V_1, \dots, V_k$ de $[n]$, há uma parte com $\lceil n/k \rceil$ elementos.

Suponha que $\underbrace{|V_i| < \lceil n/k \rceil}$, então $\sum_{i=1}^{k} |V_i| \leq k \lfloor n/k \rfloor < n$

$$|V_i| \leq \lfloor n/k \rfloor$$

UM CONJUNTO $A \subseteq [n]$ É LIVRE DE SOMA SE PARA TODOS $x, y, z \in A$

TEMOS $x + y \neq z$ (x E y PODEM SER IGUAIS)

EQUIV: $\forall x, y \in A$ TEMOS $x + y \notin A$

EX: 1, 2, 4, 8 $\rightsquigarrow$ $4+4=8$ NÃO É LIVRE DE SOMA

EX: ÍMPARES. $\rightsquigarrow$ INFINITO. $A = \{ i \in [n] : i \text{ É ÍMPAR} \}$ $|A| = \lceil \frac{n}{2} \rceil$

PERGUNTA: QUÃO GRANDE PODE SER A, COM RESPEITO A n?

EX: ÍMPARES. INFINITO. $A=\{i\in[n] : i \text{ É ÍMPAR}\}$ $\quad |A| = \lceil \frac{n}{2} \rceil$

PERGUNTA: QUÃO GRANDE PODE SER A, COM RESPEITO A n?

PROP: SE $A \subseteq [n]$ É LIVRE DE SOMA, ENTÃO $|A| \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$

PROVA: SUPONHA, POR CONTRADIÇÃO, QUE $|A| > \lceil \frac{n}{2} \rceil$, ENTÃO $|A| \geq \lceil \frac{n}{2} \rceil + 1$

$\underset{\text{BOLAS VERMELHAS}}{|A|}$

SEJA $n' = \max A \leq n$

DEFINA $\underset{\text{BOLAS AZUIS}}{B} = \{n'-a : a \in A\} \setminus 0$

NOTE QUE $|B| = |A| - 1$ E $B \subseteq [n]$.

$n = 7$

$A = \{1, 3, 7\}$

$B = \{6, 4, 0\}$

LOGO, $|A| + |B| = 2|A| - 1 \geq 2\left(\lceil \frac{n}{2} \rceil + 1\right) - 1 = 2\underbrace{\lceil \frac{n}{2} \rceil}_{\geq \frac{n}{2}} + 1 > \underset{\text{BOLAS}}{n}$

PELO PRINCÍPIO DA CASA DOS POMBOS, $A \cap B \neq \emptyset$

SEJA $b \in A \cap B$. COMO $b \in B$, EXISTE $a \in A$ T.q $b = n' - a$

MAS $a + b = n'$. UMA CONTRADIÇÃO. ∎

DIZEMOS QUE $A \subseteq [n]$ É LIVRE DE DIVISORES SE NÃO HÁ PAR $x, y \in A$ T.Q. x SEJA DIVISOR DE y.

EX: OS PRIMOS : $\lim_{n \to \infty} \pi(n) = n / \ln n$

↳ O NÚMERO DE NÚMEROS PRIMOS $\leq n$

EX: FIXE n E TOME $A = [n+1, 2n] \subseteq [2n]$

SEJA y EM $A = [n+1, 2n]$.

SE x DIVIDE y, ENTÃO EXISTE $z \geq 2$ T.Q. $x \cdot z = y$

LOGO $x = \frac{y}{z} \leq \frac{y}{2} \leq \frac{2n}{2} = n$

$$|A| = n = \frac{|[2n]|}{2} > \frac{2n}{\log 2n}$$

Prop: Se $A \subseteq [2n]$ é um conjunto livre de divisor, então $|A| \leq n$.

Prova: Para cada ímpar $m \in [2n]$ crie uma caixa.

Para cada $x \in A$, escreva $x = 2^k \cdot m$, em que m é ímpar e coloque x na caixa m.

Ex.: $A = \{2, 3, 5, 6\} \subseteq [6]$

$2^1 \cdot 1 \quad 2^1 \cdot 3 \quad 2^0 \cdot 5 \quad 2^1 \cdot 3$

$n = 4$

$\boxed{2}$ 1 $\quad \boxed{3 \; 6}$ 3 $\quad \boxed{5}$ 5

Note que há n caixas.

Suponha que $|A| > n$, então há dois números de A na mesma caixa. Digamos x, y estão na caixa m.

Logo $x = 2^{k_1} \cdot m$ e $y = 2^{k_2} \cdot m$.

Se $k_1 > k_2$, então y divide x, uma contradição.

INDUÇÃO MATEMÁTICA

SEJA $A \subseteq \mathbb{N}$ T.Q.

(i) $1 \in A$

(ii) PARA TODO $n \in A$, TEMOS $n+1 \in A$.

ENTÃO $A = \mathbb{N}$.

INDUÇÃO MATEMÁTICA FORTE

SEJA $A \subseteq \mathbb{N}$

(i) $1 \in A$

(ii) SE $\forall n' < n$, TEMOS $n' \in A$
ENTÃO $n \in A$

EX: SEJA $c \neq 0$. ENTÃO $\forall n \in \mathbb{N}$, TEMOS $\sum_{i=1}^{n} c^i = \frac{c^{n+1} - c}{c-1}$

DEM: SEJA $A = \left\{ n \in \mathbb{N} : \sum_{i=1}^{n} c^i = \frac{c^{n+1} - c}{c-1} \right\}$

(i) $1 \in A$. DE FATO $\sum_{i=1}^{1} c^i = c = \frac{c(c-1)}{c-1} = \frac{c^2 - c}{c-1} = \frac{c^{n+1} - c}{c-1}$ ✓

(ii) SUPONHA QUE $n \in A$.
LOGO $\sum_{i=1}^{n} c^i = \frac{c^{n+1} - c}{c-1}$.

$$\sum_{i=1}^{n+1} c^i = c^{n+1} + \sum_{i=1}^{n} c^i = c^{n+1} + \frac{c^{n+1} - c}{c-1}$$

$$= \frac{c^{n+2} - \cancel{c^{n+1}} + \cancel{c^{n+1}} - c}{c-1} = \frac{c^{n+2} - c}{c-1}.$$

LOGO $n+1 \in A$. PORTANTO $A = \mathbb{N}$.

$$\sum_{i=1}^{n} c^i = c^1 + \dots + c^n = S$$

$$= c^2 + \dots + c^{n+1} = c \cdot S$$

$$c \cdot S - S = c^{n+1} - c^1$$

$$(c-1) \cdot S$$

$$S = \frac{c^{n+1} - c}{c-1}$$

Contagem Dupla

→ Contar um conjunto de duas formas

Ex: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^{n}$

<u>Prova</u>: Vamos contar o número de subconjuntos de $[n]$.

$$A = 2^{[n]} = \{B \subseteq [n]\}$$

se $A_k = \{B \subseteq [n] : |B| = k\}$, temos $|B_k| = \binom{n}{k}$

Logo $|A| = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$.

$$\left(\begin{array}{cccc} 0 & 1 & \dots & n \\ 1, & & & \end{array}\right)$$

Por outro lado, cada $i \in [n]$ tem duas opções: estar ou não estar.

Então $|A| = 2^{n}$ $\blacksquare$

Lema dos apertos de mão: Dado grafo G, temos

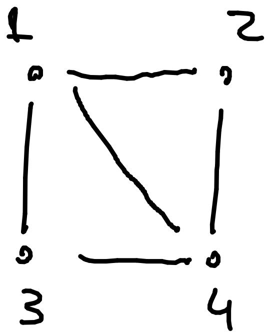
Grau de u

$$\sum_{u \in V(G)} d(u) = 2e(G)$$

↳ número de arestas de G.

↳ Conj. de vtxs de G

Ex:



$e(G) = 5$ $\qquad$ $3, 2, 2, 3 = 10$

Prova: $A = \{(v, e) : e \text{ é incidente a } v\}$.

1) Toda aresta está em exatamente dois pares $\therefore$ $|A| = 2e(G)$

2) Todo vtx u está em exatamente $d(u)$ pares. Logo $|A| = \sum_{u \in V(G)} d(u)$

$\blacksquare$