MÉTODO DO PRIMEIRO MOMENTO

DEF: UMA VARIÁVEL ALEATÓRIA X EM UM ESPAÇO DE PROBABILIDADE $(\Omega, \mathbb{P})$ É UMA FUNÇÃO $X : \Omega \to \mathbb{R}$.

DADO $x \in \mathbb{R}$, DENOTAMOS POR $\{X \geq x\}$ O EVENTO

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) \geq x\}$$

E POR $\mathbb{P}(X \geq x)$ A PROBABILIDADE DESTE EVENTO

ANALOGAMENTE, DEFINIMOS $\mathbb{P}(X \leq x)$, $\mathbb{P}(X > x)$, $\mathbb{P}(X < x)$, $\mathbb{P}(X = x)$

Def: A ESPERANÇA OU MÉDIA (OU VALOR ESPERADO, OU PRIMEIRO MOMENTO) DE X É

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \cdot \underline{\mathbb{P}(\omega)} =$$

SE X É UMA VARIÁVEL ALEATÓRIA INTEIRA E NÃO NEGATIVA, TAMBÉM TEMOS

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \mathbb{P}(X = k)$$

EXEMPLO: DADO EVENTO $A \subseteq \Omega$, A VARIÁVEL INDICADORA DE A É A VARIÁVEL $\mathbb{1}_A$ T.Q.

$$\mathbb{1}_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{SE } \omega \in A \\ 0, & \text{SE } \omega \notin A \end{cases}$$

NOTE QUE $\mathbb{E}[\mathbb{1}_A] = \sum_{k \in \{0,1\}} k \cdot \mathbb{P}(\mathbb{1}_A = k) = \mathbb{P}(\mathbb{1}_A = 1)$

$= \mathbb{P}(A)$

DIZEMOS QUE UMA VARIÁVEL ALEATÓRIA X TEM DISTRIBUIÇÃO DE BERNOULLI COM PARÂMETRO p SE

$$\mathbb{P}(X = 1) = p \quad \text{E} \quad \mathbb{P}(X = 0) = 1 - p$$

NOTE QUE $\mathbb{E}[X] = p$.

PROP: PARA QUAISQUER VARIÁVEIS ALEATÓRIAS X E Y, E $a,b \in \mathbb{R}$ TEMOS

$$\mathbb{E}[aX+bY] = a\,\mathbb{E}[X] + b\,\mathbb{E}[Y]$$

$$= \sum_{\omega\in\Omega} (aX+bY)(\omega) = \sum_{\omega\in\Omega} \left(aX(\omega) + bY(\omega)\right)$$

$$= \underbrace{a\sum_{\omega\in\Omega} X(\omega)}_{\mathbb{E}[X]} + b\sum_{\omega\in\Omega} Y(\omega)$$

$$\mathbb{E}[Y]$$

DEF: DIZEMOS QUE $X_1, \dots, X_m : \Omega \to \mathbb{R}$ SÃO VARIÁVEIS INDEPENDENTES SE PARA QUAISQUER $x_1, \dots, x_m \in \mathbb{R}$ OS EVENTOS $\{X_i = x_i\}$ $(1 \leq i \leq m)$ SÃO MUTUAMENTE INDEPENDENTES.

PROP: SE X E Y SÃO VARIÁVEIS INDEPENDENTES, ENTÃO

$$\mathbb{E}[X_1 \cdot X_2] = \mathbb{E}[X_1] \cdot \mathbb{E}[X_2]$$

$$= \sum_{z \in \mathbb{R}} z \, \mathbb{P}(X_1 X_2 = z)$$

$$= \sum xy \, \mathbb{P}(\{X_1 = x\} \wedge \{X_2 = y\})$$

$$= \sum x \mathbb{P}(X_1 = x) \cdot y \mathbb{P}(X_2 = y) = \underbrace{\sum_x x \mathbb{P}(X_1 = x)}_{\mathbb{E}(X_1)} \cdot \underbrace{\sum_y y \mathbb{P}(X_2 = y)}_{\mathbb{E}(X_2)}$$

$$\sum (x_1 y_1 + x_1 y_2 + x_2 y_1 + x_2 y_2)$$

$$x_1 (y_1 + y_2) + x_2 (y_1 + y_2)$$

DEF: UMA VARIÁVEL ALEATÓRIA BINOMIAL COM PARÂMETROS (n, p) É UMA SOMA

$$X = X_1 + \cdots + X_n$$

EM QUE $X_1, \ldots, X_n$ SÃO VARIÁVEIS ALEATÓRIOS INDEPENDENTES COM DISTRIBUIÇÃO DE BERNOULLI COM PARÂMETRO p.

NOTE QUE SE X É UMA VAR. ALEAT. BINOM. COM PARAM. (n, p) ENTÃO

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[X_i] = np$$

→ UMA PROVA USANDO O MÉTODO DO PRIMEIRO MOMENTO CONSISTE EM CALCULAR A ESPERANÇA DE UMA VAR. ALEAT. ADEQUADO.

PROP: SEJA X UMA VAR. ALEAT.. SE $\mathbb{E}[X] \geq t$, ENTÃO

$$\mathbb{P}(X \geq t) > 0$$

TEOREMA: TODO GRAFO G POSSUI UM SUBGRAFO BIPARTIDO $H \subseteq G$ T.q.

$$e(H) \geq \frac{e(G)}{2}$$

PROVA: COLORA OS VÉRTICES ALEATORIAMENTE COM PRETO E BRANCO. T.q. $\mathbb{P}(v \text{ É PRETO}) = \frac{1}{2}$.

AS ARESTAS BICOLORIDAS FORMAM UM GRAFO BIPARTIDO.

↳ TER UM VÉRTICE DE CADA COR

NOTE QUE $\mathbb{P}(uv \text{ É BICOLORIDA}) = \frac{1}{2}$.

SEJA X_{uv} A VAR. INDI. DO EVENTO $\{uv \text{ É BICOLORIDA}\}$

O NÚMERO DE ARESTAS BICOL. É $X = \sum_{e \in E(G)} X_{uv}$ E

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{e \in E(G)} \mathbb{E}[X_{uv}] = \frac{1}{2} e(G)$$

TEOREMA (Szele): Existe um torneio com n vértices e pelo menos $\frac{n!}{2^{n-1}}$ caminhos Hamiltonianos.

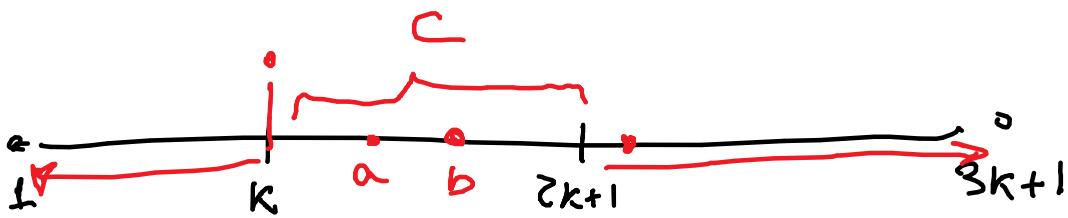
DEF: Um conjunto A é livre de soma se $x, y \in A$ então $x+y \notin A$

TEOREMA (Erdős): Se A é um conjunto de n inteiros positivos, então existe subconjunto $B \subseteq A$ livre de soma e t.q. $|B| > \frac{n}{3}$

PROVA: Seja p um primo grande. $\mathbb{Z}_p^* = \{1, \dots, p-1\}$ $\qquad (p-1)^2 = 1 \mod p$

$p = 3k+2$

$$C = \{ i \in \mathbb{N} : k < i \leqslant 2k+1 \}$$

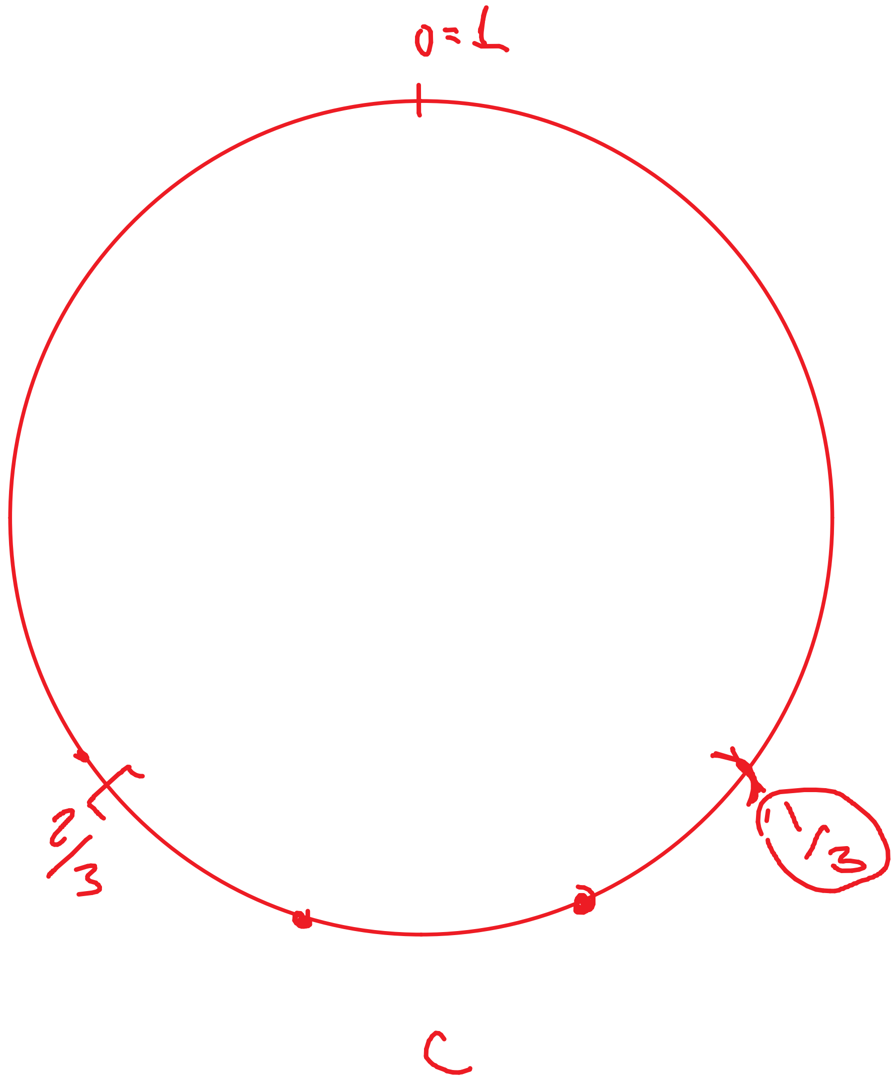


C é livre de soma.

$$|C| = k+1 > \frac{p-1}{3}$$

$a, b \geqslant k+1 \qquad a, b \leqslant 2k+1$

$a+b \geqslant 2k+2 \qquad a+b \leqslant 4k+2 = p+k$


0 = L
2/3
1/3
C

SEJA $t \in \mathbb{Z}_p^*$ ESCOLHIDO ALEATORIAMENTE, E SEJA

$$Y = t \cdot A \pmod{p}$$

$$|Y| = |A|$$

$$a \neq b$$

$$t \cdot a = t \cdot b \rightsquigarrow \cancel{t'} \cdot \cancel{t} \cdot a = \cancel{t'} \cdot \cancel{t} \cdot b$$

$$t' \text{ T.Q. } t' \cdot t = 1$$

DADO $a \in \mathbb{Z}_p^*$, A PROBABILIDADE $\mathbb{P}(a \in Y) = \frac{|A|}{p-1}$

$$\underline{a \in Y} \iff \exists\, b \in A \text{ T.Q. } a = t \cdot b \pmod{p}$$

$$A = \{b_1, \ldots, b_m\} \quad T_a = \{t_1, \ldots, t_m\} \text{ T.Q. } b_i \cdot t_i = a$$

$$t$$

$$\mathbb{E}[|Y \cap C|] = \sum_{c \in C} \mathbb{P}(c \in Y) = |C| \cdot \frac{|A|}{p-1} > \frac{|A|}{3}$$

ENTÃO EXISTE t_0 T.Q. $\left| t_0 \cdot A \cap C \right| > \frac{|A|}{3}$ (MOD P)

$$|C| = k+1 > \frac{p-1}{3}$$

SEJA $B = \{a \in A : t_0 \cdot a \in C \pmod p\}$ $|B| > \frac{|A|}{3}$.

AF: B É LIVRE DE SOMA.

CASO CONTRÁRIO, $\exists\, a, b \in B$ T.q. $a + b \in B$

MAS ENTÃO $\underbrace{\underbrace{t_0 \cdot a}_{\in C} + \underbrace{t_0 \cdot b}_{\in C}} = \underbrace{t_0 \underbrace{(a+b)}_{\in B}}_{\in C}$

COMO C É LIVRE DE SOMA, ISSO NÃO PODE ACONTECER. ∎