SEJA G UM GRAFO K-REGULAR

I É IND MÁXIMO

$$n-|I| = |V \setminus I| \leq k \cdot |I| \rightsquigarrow |I|(k+1) \geq n$$

$$\alpha(G) = |I| \geq \frac{n}{k+1} = \sum \frac{1}{\underset{d(v)+1}{k+1}}$$

TEOREMA: PARA TODO GRAFO G, TEMOS

$$\alpha(G) \geq \sum_{v \in V(G)} \frac{1}{1+d(v)}$$

$\alpha(G)$ ↳ TAMANHO DO MAIOR CONJUNTO INDEPENDENTE DE G

PROVA:

$v_1 \quad v_2 \quad \dots \quad v_n$

$A_\sigma = \{$ VTXS QUE APARECEM ANTES DE TODOS OS SEUS VIZINHOS $\}$ É UM CONJUNTO INDEP.

$$N[u] = N(u) \cup \{u\}$$

CONSIDERE UMA PERMUTAÇÃO ALEATÓRIA $\sigma : V(G) \to [n]$ DE $V(G)$

$$\frac{(1+d(v))\cancel{d(v)}!}{\cancel{d(v)!}}$$

A PROBABILIDADE DE $u \in A_\sigma$, $\mathbb{P}(u \in A_\sigma) = \frac{1}{1+d(u)}$

SEJA $X = \sum_{v \in V(G)} \mathbb{1}_{u \in A_\sigma}$, ENTÃO $\mathbb{E}[X] = \sum_{v \in V(G)} \mathbb{P}(u \in A_\sigma) = \sum_{v \in V(G)} \frac{1}{1+d(v)}$. $\square$

FUNÇÕES CONVEXAS

DEF: UMA FUNÇÃO f É CONVEXA SE

$$f(tx+(1-t)y) \leqslant t f(x) + (1-t) f(y)$$

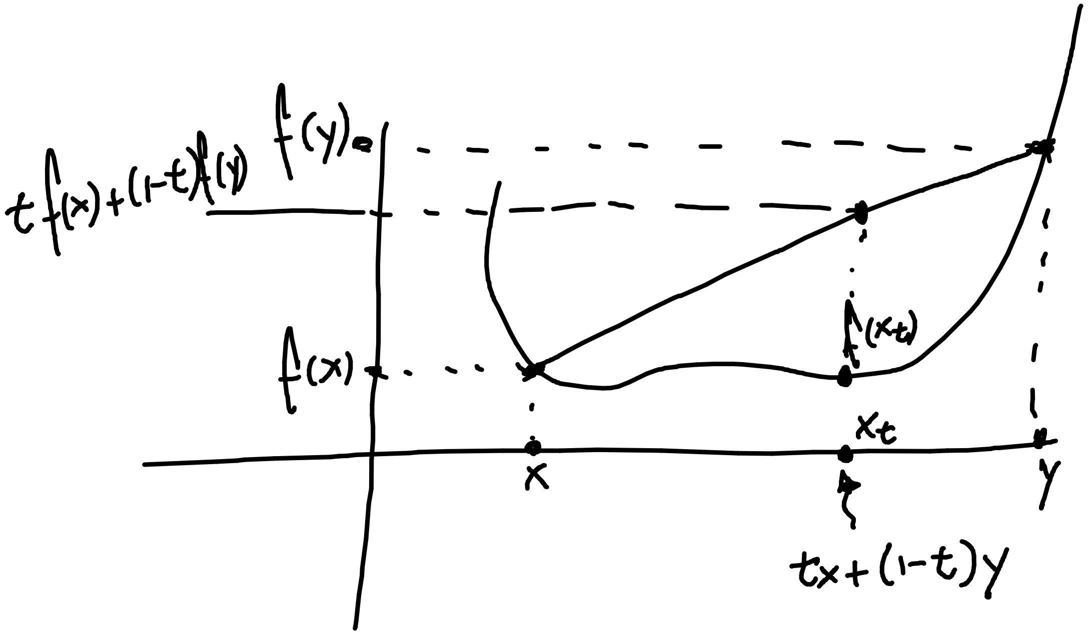
EX: x^2

$f(x) = x^r$

COM $x \geqslant 0$

E $r \geqslant 1$

$f(x) = \binom{x}{2}$



DEF: UMA FUNÇÃO f É CÔNCAVA SE

$$f(tx+(1-t)y) \geqslant t f(x) + (1-t) f(y)$$

UMA FUNÇÃO DUPLAMENTE DIFERENCIÁVEL É CONVEXA SSE A SUA SEGUNDA DERIVADA É NÃO NEGATIVA.

$$f(x) = x^3$$

$$f''(x) = 6x \geqslant 0 \iff x \geqslant 0$$

$$f(x) = \frac{x(x-1)}{2} = \frac{x^2 - x}{2}$$

$$f'(x) = \frac{2x-1}{2}$$

$$f''(x) = 1 \geqslant 0$$

DEF: UMA FUNÇÃO DIFERENCIÁVEL f É CONVEXA SE SEU GRÁFICO ESTÁ "ACIMA" DE TODAS AS SUAS RETAS TANGENTES

OU SEJA, SE PARA TODO $x_0 \in \mathbb{R}$, COM RETA TANGENTE $L_{x_0}(x)$ VALE QUE $f(x) \geq L_{x_0}(x)$ PARA TODO x.

TEOREMA (DESIGUALDADE DE JENSEN). SEJA $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ UMA FUNÇÃO CONVEXA E X UMA VARIÁVEL ALEATÓRIA. ENTÃO

$$\mathbb{E}[f(X)] \geq f(\mathbb{E}[X])$$

Teorema (Desigualdade de Jensen). Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função convexa e X uma variável aleatória. Então

$$\mathbb{E}[f(X)] \geq f(\mathbb{E}[X])$$

Prova: Tome $x_0 = \mathbb{E}[X]$. Como a esperança é operador linear e $L_{x_0}(x)$ é uma função afim (linear), vale que

$$\mathbb{E}[L_{x_0}(X)] = L_{x_0}(\mathbb{E}[X])$$

$$\mathbb{E}[aX + b] = a\mathbb{E}[X] + b$$

$$f(X) \geq L_{x_0}(X)$$

Pela definição de convexidade, obtemos

$$\mathbb{E}[f(X)] \geq \mathbb{E}[L_{x_0}(X)] = L_{x_0}(\underbrace{\mathbb{E}[X]}_{x_0})$$

$$= L_{x_0}(x_0) = f(x_0) = f(\mathbb{E}[X])$$

$\square$

TEOREMA (DESIGUALDADE DE JENSEN). SEJA $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ UMA FUNÇÃO CONVEXA E X UMA VARIÁVEL ALEATÓRIA. ENTÃO

$$\mathbb{E}[f(X)] \geqslant f(\mathbb{E}[X])$$

EX: SEJAM $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ E SEJA X UMA VARIÁVEL ALEATÓRIA QUE ESCOLHE UNIFORMEMENTE AO ACASO UM x_i.

$$\left(\Omega = \{1, \ldots, n\}, \mathbb{P}(i) = 1/n\right) \quad X(i) = x_i$$

PELA DES. DE JENSEN

$$\frac{1}{n} \sum_i f(x_i) = \mathbb{E}[f(X)] \geqslant f(\mathbb{E}[X]) = f\left(\frac{1}{n} \sum_i x_i\right)$$

EX: SE $x_i = d(v_i)$ E $f(x) = \binom{x}{2}$, OBTEMOS QUE

$$\frac{1}{n} \cdot \sum \binom{d(v)}{2} \geqslant \binom{\frac{1}{n} \sum d(v)}{2} = \binom{\frac{2e(G)}{n}}{2} \Rightarrow \sum \binom{d(v)}{2} \geqslant n \binom{\frac{2e(G)}{n}}{2}$$

SORTEIO DE GRAFOS

ERDŐS-RÉNYI

DEF: DADOS $n \in \mathbb{N}$ E $p \in [0,1]$, DEFINIMOS $G(n,p)$ COMO O GRAFO ALEATÓRIO COM n VÉRTICES OBTIDO AO ADICIONARMOS UMA ARESTA ENTRE CADA PAR DE VÉRTICES $u,v \in [n]$ DE FORMA ALEATÓRIA E INDEPENDENTE COM PROBABILIDADE p.

→ $G(n,p)$ NÃO É UM GRAFO, MAS SIM UMA DISTRIBUIÇÃO DENTRE TODOS OS GRAFOS COM n VÉRTICES

FIXE H UM GRAFO COM n VTXS E m ARESTAS

$$\mathbb{P}\left(G(n,p) = H\right) = p^m \cdot (1-p)^{\binom{n}{2}-m}$$

$$\mathbb{P}\left(G(n,\tfrac{1}{2}) = H\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^m \cdot \left(1-\frac{1}{2}\right)^{\binom{n}{2}-m} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\binom{n}{2}}$$

→ EM GERAL $p = p(n)$ É UMA FUNÇÃO DE n.

<u>EX</u>: $$\mathbb{E}[e(G(n,p))] = \sum_{e} \mathbb{E}[\mathbb{1}_{e \in G(n,p)}] = \sum_{e} p = p \cdot \sum_{e} = p \cdot \binom{n}{2}$$

$$e(G(n,p)) = \sum_{e} \mathbb{1}_{e \in G(n,p)}$$

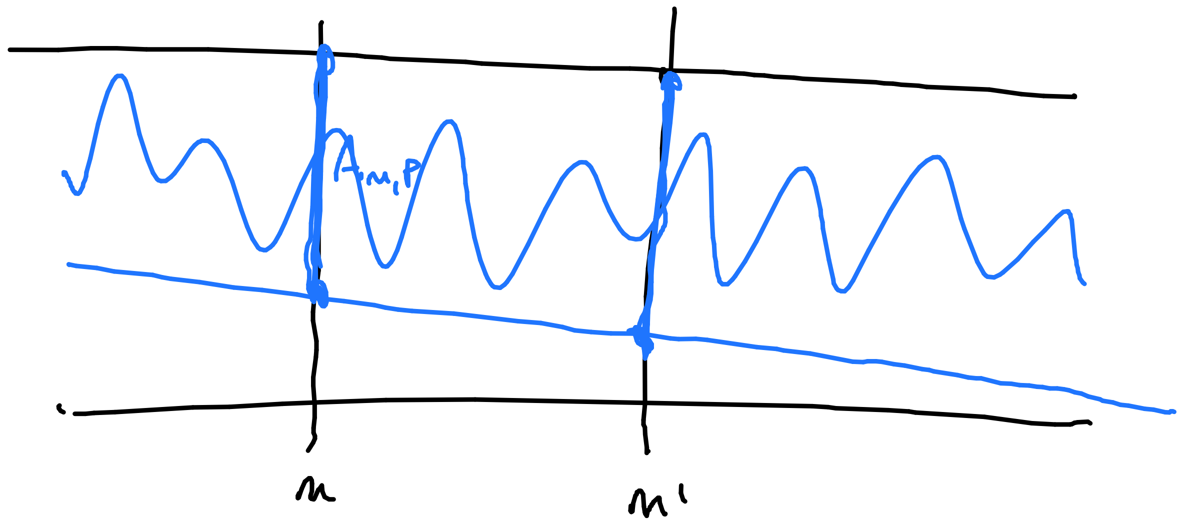
<u>EX</u>: $$\mathbb{E}[d(1)] = \sum_{i=2}^{n} \mathbb{E}[\mathbb{1}_{1i \in G(n,p)}] = \sum_{i=2}^{n} p = p(n-1)$$

$$d(1) = \sum_{i=2}^{n} \mathbb{1}_{1i \in G(n,p)}$$

<u>DEF</u>: DIZEMOS QUE UM EVENTO $A_{n,p}$ EM $G(n,p)$ OCORRE COM ALTA PROBABILIDADE SE A PROBABILIDADE DE $A_{n,p}$ CONVERGE PARA 1 QUANDO $n \to \infty$.

→ ASSINTOTICAMENTE QUASE COM CERTEZA

A.A.S. ASYMPTOTICALLY ALMOST SURELY



$A_{m,p}$
m
m'

Teorema. Seja $p = p(n) \in (0,1)$. Então

$$\alpha(G(n,p)) \leq \frac{2\log n}{p}$$

com alta probabilidade.

$\binom{n}{k} \leq \left(\frac{en}{k}\right)^k$

$(1-p) \leq e^{-p}$

$(1+x) \leq e^x$

Prova: Tome $G = G(n,p)$.
Fixe $S \subseteq V(G)$ com k vértices. Note que a probabilidade de S ser um conjunto independente é

$$\mathbb{P}(e(G[S]) = 0) = (1-p)^{\binom{k}{2}}$$

Logo, pela cota da união, a probabilidade de $\alpha \geq k$ é no máximo

$$\mathbb{P}(\alpha(G(n,p)) \geq k) \leq \sum_{|S|=k} \mathbb{P}(e(G[S])=0) = \binom{n}{k}(1-p)^{\binom{k}{2}}$$

$$\leq \left(\frac{en}{k}\right)^k \cdot e^{-p\binom{k}{2}} = \left(\frac{en}{k} \cdot e^{-p\frac{k-1}{2}}\right)^k$$

$$\underline{\mathbb{P}(\alpha(G(n,p)) \geq k)} \leq \sum_{|S|=k} \mathbb{P}(e(G[S])=0) = \binom{n}{k}(1-p)^{\binom{k}{2}}$$

$$\leq \left(\frac{en}{k}\right)^k \cdot e^{-p\binom{k}{2}} = \left(\frac{en}{k} \cdot e^{-p\frac{k-1}{2}}\right)^k \longrightarrow 0$$

AGORA, SE $pk \geq 2\log n$

$$\alpha(G(n,p)) \leq \frac{2\log n}{p}$$

$$-p\,\frac{k-1}{2} = \frac{-pk}{2} + \frac{p}{2} \leq -\log n + \frac{1}{2}$$

$$\frac{en}{k} \cdot e^{-p\frac{k-1}{2}} \leq \frac{en}{k} \cdot e^{-\log n + \frac{1}{2}} = \frac{e \cdot \cancel{n}}{k} \cdot \cancel{e^{-\log n}} \cdot e^{1/2} = \frac{e^{3/2}}{k}$$

$$k \geq \frac{2\log n}{p} > 2\log n$$

$k \to \infty$ QUANDO $\underline{n \to \infty}$

$$= \left(\frac{en}{k} \cdot e^{-p\frac{k-1}{2}}\right)^k \leq \left(\frac{e^{3/2}}{k}\right)^{k} \longrightarrow 0$$

$\blacksquare$