

MÉTODO DA CONCENTRAÇÃO

PROPOSIÇÃO (DESIGUALDADE DE CHERNOFF): SE $\epsilon \in (0, 1]$ E X É UMA VARIÁVEL ALEATÓRIA BINOMIAL COM MÉDIA μ , ENTÃO

$$\mathbb{P}(|X - \mu| \geq \epsilon \cdot \mu) \leq 2 \cdot e^{-\epsilon^2 \mu / 3}$$

LEMBRE-SE QUE $G \rightarrow H$ SE TODA 2-COLORAÇÃO DE $E(G)$ POSSUI UMA CÓPIA MONO χ DE H .

↗ size

DEF: O **NÚMERO TAMANHO RAMSEY** DE H É DEFINIDO COMO

$$\hat{r}(H) = \min \{e(G) : G \rightarrow H\}$$

DEF: O NÚMERO TAMANHO RAMSEY DE H É DEFINIDO COMO

$$\hat{r}(H) = \min \{e(G) : G \rightarrow H\}$$

TEOREMA (BECK, 1983): EXISTE $C > 0$ T.q.

$$\hat{r}(P_k) \leq C \cdot k$$

PARA TODO $k \in \mathbb{N}$.

TEOREMA (BECK, 1983): EXISTE $C > 0$ T.q.

$$\hat{r}(P_k) \leq C \cdot k$$

PARA TODO $k \in \mathbb{N}$.

IDEIA: ESCOLHEMOS UM GRAFO ALEATÓRIO $G = G(n, p)$ COM $n = a \cdot k$

E $p = \frac{C}{n} = \frac{C}{a \cdot k}$. ISSO IMPLICA QUE

$$\mathbb{E}[e(G)] = p \cdot \binom{n}{2} \approx p \frac{n^2}{2} = \frac{C}{n} \frac{n^2}{2} = \frac{C \cdot a \cdot k}{2}$$

1) VAMOS MOSTRAR QUE ENTRE QUALQUER DOIS CONJUNTOS X, Y GRANDES HÁ UMA ARESTA

2) VAMOS PARTICIONAR $V(G)$ EM QUATRO CONJUNTOS

$$V(G) = X \cup Y \cup A \cup B$$

T.q. A é "um caminho azul", B é "um caminho vermelho",
E $e(X, Y) = 0$ E $|X| = |Y|$

LOGO X E Y SÃO PEQUENOS E A OU B TEM SER GRANDE.

LEMA: SEJA $c > 0$ E CONSIDERE O GRAFO ALEATÓRIO $G = G(n, p)$

COM $p = \frac{c}{n}$. TEMOS

$$\mathbb{P}(e(G) \geq pm^2) \leq e^{-\frac{cm}{8}}$$

PROVA: NOTE $e(G)$ É UMA VARIÁVEL ALEATÓRIA BINOMIAL COM MÉDIA

$$\mu = p \binom{n}{2}$$

$$\mathbb{P}(|X - \mu| \geq \epsilon \mu) \leq 2 \cdot e^{-\epsilon^2 \mu / 3}$$

PELA DES. DE CHERNOFF, TEMOS

$$\mathbb{P}(e(G) \geq pm^2) = \mathbb{P}(e(G) - \mu \geq pm^2 - \mu)$$

$$\leq \mathbb{P}(|e(G) - \mu| \geq pm^2 - \mu) \leq e^{-\mu/3}$$

$$= e^{-\frac{p \binom{n}{2}}{3}} = e^{-\frac{c}{3n} \binom{n}{2}} < e^{-\frac{c}{6} \frac{(n-1)}{2}} < e^{-\frac{cn}{8}} \quad \square$$

LEMA SEJA $c > 0$ E CONSIDERE O GRAFO ALEATÓRIO $G = G(n, p)$

COM $p = \frac{c}{n}$. COM ALTA PROBABILIDADE,
 $e(X, Y) \geq L$

PARA TODO $X, Y \subseteq V(G)$ DISJUNTOS COM $|X| \geq |Y| \geq 3c^{-1/2} n$

PROVA: COMO X E Y SÃO DISJUNTOS $e(X, Y)$ É UMA VARIÁVEL BIN.

COM MÉDIA $\mu = p|X||Y|$. SUPONHA QUE $|X| \geq |Y| \geq 3c^{-1/2} n$

PELA DES. DE CHERNOFF

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(e(X, Y) = 0) &\leq \mathbb{P}\left(|e(X, Y) - \mu| \geq \mu\right) \\ &\leq 2 \cdot e^{-\frac{p|X||Y|}{3}} \leq 2 \cdot e^{-\frac{p}{3} c^{-1} n^2} \\ &= 2 \cdot e^{-3n} \leq e^{-2n} \end{aligned}$$

$q c^{-1} p n^2 = q \mu$

TEMOS $\leq 4^n$ FORMAS DE ESCOLHER X E Y .

PELA COTA DA UNIÃO, A PROBABILIDADE DE EXISTIR TAIS X E Y É NO MÁXIMO $4^n \cdot e^{-2n} = (4 \cdot e^{-2})^n \rightarrow 0$

TEOREMA (BECK, 1983): EXISTE $C > 0$ T.q.

$$\hat{r}(P_k) \leq C \cdot k$$

PARA TODO $k \in \mathbb{N}$.

PROVA: SEJAM α E C CONSTANTES POSITIVAS GRANDES.

TOME $n = \alpha \cdot k$ E $C = \alpha \cdot C$.

PELO LEMA, COM $p = \frac{C}{n}$ EXISTE UM GRAFO G COM n VÉRTICES E
 $e(G) \leq pn^2 = Cn = C \cdot \alpha \cdot k = Ck$ E TAL QUE $e(X, Y) \geq 1$

PARA QUAISQUER X E Y DISJUNTOS COM $|X| \geq |Y| \geq 3C^{-\frac{1}{2}} n^{\frac{1}{2}}$

VAMOS MOSTRAR QUE $G \rightarrow P_k$.

SUPONHA QUE EXISTE 2-COL. DE G SEM P_k MONOX,

ALGORITMO DE BUSCA EM PROFUNDIDADE

ALGORITMO DE BUSCA EM PROFUNDIDADE

→ EM CADA PASSO DO ALGORITMO TEREMOS UMA PARTIÇÃO

$$V(G) = A \cup X \cup Y$$

→ NO COMEÇO TOMAMOS $A = X = \emptyset$ E $Y = V(G)$

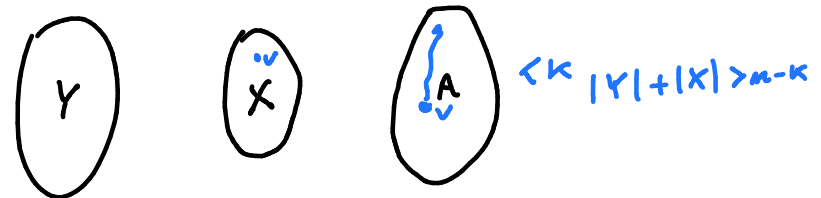
• SE A É VAZIO, MOVEMOS UM VÉRTICE QUALQUER DE Y PARA A

• SE A NÃO É VAZIO, SEJA v O ÚLTIMO VÉRTICE DE A (v É O FINAL DO CAMINHO). SE v POSSUI VIZINHO AZUL u EM Y , MOVA u PARA A ; CASO CONTRÁRIO MOVA v PARA X

→ EM TODO PASSO NÃO HÁ ARESTAS AZUIS ENTRE X E Y

→ EM CADA PASSO, $|Y| - |X|$ DIMINUI EM 1

→ PARAMOS QUANDO $|X| = |Y|$



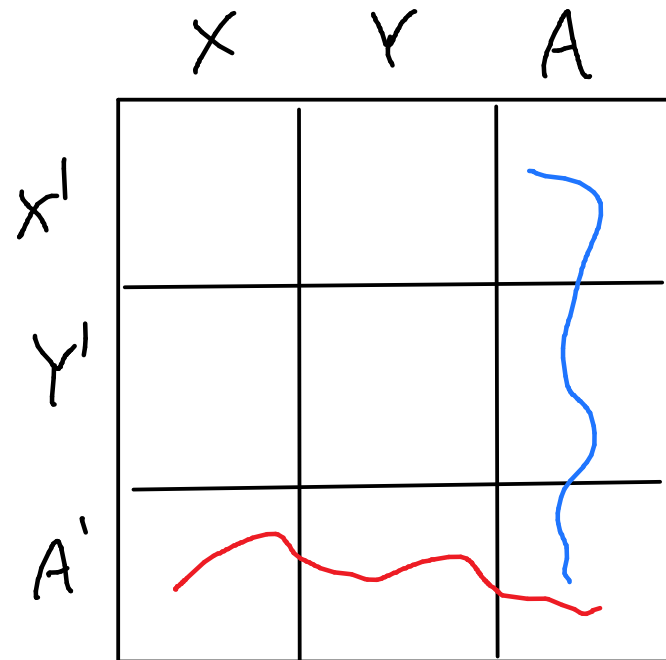
NOTE $|X| + |Y| = n - |A| \geq a \cdot k - k$
 $= (a-1) \cdot k$

$|A| \leq k$

Logo $|X| = |Y| \geq \frac{k(a-1)}{2}$

PODEMOS OBTER UMA PARTIÇÃO ANALÓGUA PARA Δ COM VERMELHA

$$V(G) = X' \cup Y' \cup A'$$

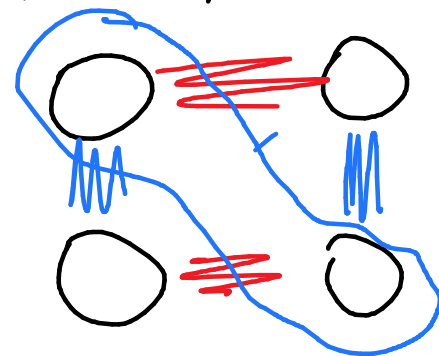


$$P_1 = \left\{ \underbrace{(x, x'), (y, y')} \right\}$$

$$P_2 = \left\{ \underbrace{(x, y'), (y, x')} \right\}$$

AF: EXISTE $i \in \{1, 2\}$ T.q. PARA TODO $(U, W) \in P_i$;

$$|U \cap W| \geq \frac{\kappa(a-3)}{4}$$



PROVA: LEMBRE-SE QUE $|X| = |Y| \geq \frac{\kappa(a-1)}{2}$

SE $|X \cap X'|$ E $|X \cap Y'| < \frac{\kappa(a-3)}{4}$,

ENTÃO

$$\begin{aligned} \frac{\kappa(a-3)}{2} &> |X \cap X'| + |X \cap Y'| \geq |X| - |A'| \\ &\geq \frac{\kappa(a-1)}{2} - \kappa = \frac{\kappa(a-3)}{2} |A'| \end{aligned}$$

