

### Lista 3 de Combinatória Extremal e Probabilística - 2022.02

Data de entrega: 13/09/2022

**Theorem 1.** Para todo grafo  $G$ , temos

$$\alpha(G) \geq \sum_{v \in V(G)} \frac{1}{1 + d(v)}$$

**Exercício 1.** Use o Teorema 1 para provar o Teorema de Turán: se o grafo  $G$  com  $n$  vértices é livre de  $K_r$ , então

$$e(G) \leq \left(1 - \frac{1}{r-1}\right) \frac{n^2}{2}$$

**Exercício 2.** (Shearer). Seja  $G$  um grafo livre de triângulos. Mostre que

$$\alpha(G) \geq \sum_{v \in V(G)} \frac{d(v)}{1 + d(v) + d_2(v)},$$

em que  $d_2(v)$  denota o número de vértices a distância 2 de  $v$ .

**Exercício 3.** prove que

$$R(4, k) \geq \left(\frac{ck}{\log k}\right)^2$$

para alguma constante  $c > 0$

**Exercício 4.** Seja  $s \geq 2$  e  $\epsilon > 0$ . Prove que existe  $t$  tal que

$$ex(n, K_{s,t}) \geq n^{2 - \frac{1}{s} - \epsilon}$$

para todo  $n \in \mathbb{N}$  suficientemente grande.

**Exercício 5.** Mostre que se  $p \ll \frac{1}{n}$ , então  $G(n, p)$  é acíclico com alta probabilidade.