

Combinatória Extremal e Probabilística 2022/2

Data da entrega: 20/09/2022

Questão 1. Seja $S_k \simeq K_{1,k}$ a estrela com k arestas. Qual o número extremal $\text{ex}(n, S_k)$ de S_k ? Justifique sua resposta.

Questão 2. Seja k um inteiro positivo, e seja P_k o caminho com k vértices.

- (a) Encontre um grafo P_k -livre com $2k - 2$ vértices cujo complemento é K_3 -livre.
- (b) Mostre que se um grafo G possui pelo menos $2k - 1$ vértices, então G possui uma cópia de P_k ou o complemento de G possui um triângulo.
- (c) Calcule $r(P_k, K_3)$.

Questão 3. O comprimento de um caminho ou ciclo é o seu número de arestas, e a *distância* entre dois vértices u, v é o comprimento de um caminho mais curto ligando u a v . Dado um grafo G , a *cintura* de G é o comprimento de um ciclo mais curto em G . Além disso, para cada vértice $u \in V(G)$, denote por $d_{=k}(u)$ o número de vértices de G que estão a uma distância *exatamente* k de u ; e por $d_{\leq k}(u)$ o número de vértices de G que estão a uma distância *no máximo* k de u (incluindo u). Em particular, $d_{=1}(u)$ é precisamente o grau de u em G ; e $d_{\leq 1}(u) = d_{=1}(u) + 1$.

Seja G um grafo com cintura $g = 2r$. Mostre que

$$\alpha(G) \geq \sum_{u \in V(G)} \frac{d_{=r-1}(u)}{d_{\leq r}(u)}$$

em que $\alpha(G)$ denota o tamanho do maior conjunto independente de G .