Lista 1 de Complexidade de Algoritmos - 2018.03

Data de entrega: 1/10/2018

1. (*Comportamento assintótico de polinômios*). Seja $p(n) = \sum_{i=0}^{d} a_i n^i$ com $a_d > 0$ um polinômio em n de grau d e seja k uma constante. Através das definições das notações assintóticas, prove as seguintes propriedades:
   (a) $k \geq d \Rightarrow p(n) = O(n^k)$
   (b) $k \leq d \Rightarrow p(n) = \Omega(n^k)$
   (c) $k = d \Rightarrow p(n) = \Theta(n^k)$
   (d) $k > d \Rightarrow p(n) = o(n^k)$
   (e) $k < d \Rightarrow p(n) = \omega(n^k)$

2. (*Propriedades das notações assintóticas*). Sejam $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ e $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ funções assintoticamente positivas. Prove ou refute as seguintes afirmações:
   (a) $f(n) = O(g(n)) \Rightarrow g(n) = O(f(n))$
   (b) $f(n) = \Omega(g(n)) \Rightarrow g(n) = \Omega(f(n))$
   (c) $f(n) = \Theta(g(n)) \Rightarrow g(n) = \Theta(f(n))$
   (d) $f(n) = O(g(n)) \Leftrightarrow g(n) = \Omega(f(n))$
   (e) $f(n) = o(g(n)) \Leftrightarrow g(n) = \omega(f(n))$
   (f) $f(n) = O(g(n)) \Rightarrow 2^{f(n)} = O(2^{g(n)})$

3. Verdadeiro ou falso: para todo $k > 0$, $\log^k n = O(\sqrt{n})$, onde $\log^k n = (\log n)^k$? Justifique devidamente a tua resposta.

4. (*Relações de recorrência*). Para cada uma das relações de recorrência abaixo, caso seja possível, aplique o teorema mestre; caso contrário, explique o porquê da impossibilidade.
   (a) $T(n) = 3T(n/2) + n^2$
   (b) $T(n) = T(n/2) + 2^n$
   (c) $T(n) = 2T(n/2) + n \log n$
   (d) $T(n) = 4T(n/2) + \frac{n}{\log n}$
   (e) $T(n) = 3T(n/3) + \sqrt{n}$
   (f) $T(n) = T(n/2) + n(2 - \cos n)$
   (g) $T(n) = 2T(\sqrt{n}) + \log n$
   (h) $T(n) = 9T(n/3) + \sin n$