Problemas NP-Completos

Fábio Botler

Programa de Engenharia de Sistemas e Computação
Universidade Federal do Rio de Janeiro

Aula passada

- Transformações Polinomiais
- Alguns problemas NP-Completos

Aula de hoje

- Reduções de Karp $\times$ Reduções de Cook
- Restrições e Extensões de Problemas

Definição

Uma **redução de Karp** *é um processo f que transforma instâncias de um problema Π_1 em instâncias um problema Π_2 tal que:*

1. $\Pi_1(I) = SIM$ *se e somente se* $\Pi_2(f(I)) = SIM$
2. *f pode ser computada em tempo polinomial*

Definição

Uma **redução de Karp** *é um processo f que transforma instâncias de um problema Π_1 em instâncias um problema Π_2 tal que:*

1. $\Pi_1(I) = SIM$ *se e somente se* $\Pi_2(f(I)) = SIM$
2. f *pode ser computada em tempo polinomial*

Definição (Alternativa)

Uma **redução de Karp** *de um problema Π_1 para um problema Π_2 é um algoritmo que resolve Π_1 fazendo uma chamada a uma subrotina que resolve o problema Π_2, e que toma tempo polinomial fora dessa chamada.*

Definição

Uma **redução de Cook** *de um problema* Π_1 *para um problema* Π_2 *é um algoritmo que resolve* Π_1 *fazendo um número polinomial de chamadas a uma subrotina que resolve o problema* Π_2*, e que toma tempo polinomial fora dessas chamadas.*

Definição

Uma **redução de Cook** *de um problema* Π_1 *para um problema* Π_2 *é um algoritmo que resolve* Π_1 *fazendo um número polinomial de chamadas a uma subrotina que resolve o problema* Π_2*, e que toma tempo polinomial fora dessas chamadas.*

Definição (Alternativa)

Uma **redução de Cook** *é um processo* f *que transforma instâncias de um problema* Π_1 *em conjuntos de instâncias um problema* Π_2 *tal que:*

1. $\Pi_1(I) = SIM$ *se e somente se* $SIM \in \{\Pi_2(I') \colon I' \in f(I)\}$
2. f *pode ser computada em tempo polinomial*

Definição

$\Pi'(D', Q')$ *é uma* **restrição** *de* $\Pi(D, Q)$ *se*

(i) $D' \subseteq D$

(ii) $Q' = Q$

Também dizemos que Π *é uma* **extensão** *de* Π'.

Exemplo: SAT $\times$ 3SAT

SAT

DADOS:	Uma expressão booleana E na Forma Normal Conjuntiva (FNC)
OBJETIVO:	E é satisfatível?

3SAT

DADOS:	Uma expressão booleana E na Forma Normal Conjuntiva (FNC) contendo apenas cláusulas com *três literais*
OBJETIVO:	E é satisfatível?

$\triangleright$ 3SAT é restrição de SAT.

Clique

DADOS:	Um grafo G e um inteiro k
OBJETIVO:	G possui uma clique de tamanho pelo menos k?

Clique

DADOS:	Um grafo G e um inteiro k
OBJETIVO:	G possui uma clique de tamanho pelo menos k?

Clique'

DADOS:	Um grafo G e uma clique H
OBJETIVO:	G possui um subgrafo isomorfo a H?

`Clique'`

DADOS:	Um grafo G e uma clique H
OBJETIVO:	G possui um subgrafo isomorfo a H?

Exemplo: `Clique` × `Isomorfismo de Subgrafo`

`Clique'`

DADOS:	Um grafo G e uma clique H
OBJETIVO:	G possui um subgrafo isomorfo a H?

`Isomorfismo de Subgrafo`

DADOS:	Um grafo G e um grafo H
OBJETIVO:	G possui um subgrafo isomorfo a H?

Exemplo: Clique × Isomorfismo de Subgrafo

Clique'

DADOS:	Um grafo G e uma clique H
OBJETIVO:	G possui um subgrafo isomorfo a H?

Isomorfismo de Subgrafo

DADOS:	Um grafo G e um grafo H
OBJETIVO:	G possui um subgrafo isomorfo a H?

▷ Clique' é restrição de Isomorfismo de Subgrafo.

Lema

Sejam Π *e* Π' *problemas de decisão tais que* Π' *é restrição de* Π*.*
Se Π' *é NP-Completo, então* Π *é NP-Difícil.*

Lema

Sejam Π e Π' problemas de decisão tais que Π' é restrição de Π. Se Π' é NP-Completo, então Π é NP-Difícil.

▷ Se $\Pi \in NP$, então Π é NP-Completo

Lema

Sejam Π *e* Π' *problemas de decisão tais que* Π' *é restrição de* Π. *Se* Π' *é NP-Completo, então* Π *é NP-Difícil.*

- $\triangleright$ Se $\Pi \in NP$, então Π é NP-Completo
- $\triangleright$ Se Π é NP-Completo,
  não necessariamente Π' é NP-Completo

Lema

Sejam Π *e* Π' *problemas de decisão tais que* Π' *é restrição de* Π*.*
Se Π' *é NP-Completo, então* Π *é NP-Difícil.*

- Método alternativo para provar que um problema é NP-Completo

Lema
Sejam Π e Π' problemas de decisão tais que Π' é restrição de Π. Se Π' é NP-Completo, então Π é NP-Difícil.

$\triangleright$ Método alternativo para provar que um problema é NP-Completo

Π é NP-Completo se

Lema
Sejam Π e Π' problemas de decisão tais que Π' é restrição de Π. Se Π' é NP-Completo, então Π é NP-Difícil.

▷ Método alternativo para provar que um problema é NP-Completo

Π é NP-Completo se

(i) $\Pi \in NP$
(ii) Π é extensão de um problema NP-Completo

Isomorfismo de subgrafos

Teorema

`Isomorfismo de subgrafos` é NP-Completo.

Isomorfismo de subgrafos

Teorema

`Isomorfismo de subgrafos` é NP-Completo.

Prova

`Isomorfismo de subgrafos` está em NP

Isomorfismo de subgrafos

Teorema

Isomorfismo de subgrafos é NP-Completo.

Prova

Isomorfismo de subgrafos está em NP

Isomorfismo de subgrafos é extensão de Clique'

Isomorfismo de subgrafos

Teorema

`Isomorfismo de subgrafos` *é NP-Completo.*

Prova

`Isomorfismo de subgrafos` *está em NP*

`Isomorfismo de subgrafos` *é extensão de* `Clique'`

`Clique'` *é NP-Completo*

Isomorfismo de Grafos

DADOS:	Um grafo G e um grafo H
OBJETIVO:	G é isomorfo a H?

▷ Isomorfismo de Grafos é **restrição** de Isomorfismo de subrafos

Exemplo

3SAT é NP-Completo?

Exemplo

3SAT é NP-Completo? Não devido ao lema anterior

Exemplo

3SAT é NP-Completo? Não devido ao lema anterior

Teorema

3SAT é NP-Completo

Exemplo

$\mathit{3SAT}$ é NP-Completo? Não devido ao lema anterior

Teorema

$\mathit{3SAT}$ é NP-Completo

Prova

- $\triangleright$ $\mathit{SAT} \propto \mathit{3SAT}$

Exemplo

3SAT é NP-Completo? Não devido ao lema anterior

Teorema

3SAT é NP-Completo

Prova

- ▷ $\mathit{SAT} \propto \mathit{3SAT}$
- ▷ $(x_1 \vee x_2 \vee \cdots \vee x_k) = (x_1 \vee x_2 \vee h) \wedge (\overline{h} \vee x_3 \vee \cdots \vee x_k)$

Exemplo

3SAT é NP-Completo? Não devido ao lema anterior

Teorema

3SAT é NP-Completo

Prova

- ▷ *SAT* $\propto$ *3SAT*
- ▷ $(x_1 \vee x_2 \vee \cdots \vee x_k) = (x_1 \vee x_2 \vee h) \wedge (\overline{h} \vee x_3 \vee \cdots \vee x_k)$
- ▷ *Uma cláusula de tamanho k é transformada em $(k-2)$ cláusulas de tamanho 3.*

Exemplo

3SAT é NP-Completo? Não devido ao lema anterior

Teorema

3SAT é NP-Completo

Prova

- ▷ *SAT* $\propto$ *3SAT*
- ▷ $(x_1 \vee x_2 \vee \cdots \vee x_k) = (x_1 \vee x_2 \vee h) \wedge (\overline{h} \vee x_3 \vee \cdots \vee x_k)$
- ▷ *Uma cláusula de tamanho k é transformada em $(k-2)$ cláusulas de tamanho 3.*
- ▷ *Uma expressão $E = C_1 \wedge \cdots \wedge C_p$ onde C_i possui k_i literais*

Exemplo

3SAT é NP-Completo? Não devido ao lema anterior

Teorema

3SAT é NP-Completo

Prova

- ▷ *SAT* $\propto$ *3SAT*
- ▷ $(x_1 \vee x_2 \vee \cdots \vee x_k) = (x_1 \vee x_2 \vee h) \wedge (\overline{h} \vee x_3 \vee \cdots \vee x_k)$
- ▷ *Uma cláusula de tamanho k é transformada em $(k-2)$ cláusulas de tamanho* 3.
- ▷ *Uma expressão $E = C_1 \wedge \cdots \wedge C_p$ onde C_i possui k_i literais é transformada em uma expressão E' com no máximo $(\sum k_i) - 2p$ cláusulas de tamanho* 3.

Exemplo

3SAT é NP-Completo? Não devido ao lema anterior

Teorema

3SAT é NP-Completo

Prova

- ▷ *SAT* $\propto$ *3SAT*
- ▷ $(x_1 \vee x_2 \vee \cdots \vee x_k) = (x_1 \vee x_2 \vee h) \wedge (\overline{h} \vee x_3 \vee \cdots \vee x_k)$
- ▷ *Uma cláusula de tamanho k é transformada em $(k-2)$ cláusulas de tamanho 3.*
- ▷ *Uma expressão $E = C_1 \wedge \cdots \wedge C_p$ onde C_i possui k_i literais é transformada em uma expressão E' com no máximo $(\sum k_i) - 2p$ cláusulas de tamanho 3.*
- ▷ *Se E possui $\ell = \sum k_i$ literais*

Exemplo

3SAT é NP-Completo? Não devido ao lema anterior

Teorema

3SAT é NP-Completo

Prova

- ▷ *SAT* $\propto$ *3SAT*
- ▷ $(x_1 \vee x_2 \vee \cdots \vee x_k) = (x_1 \vee x_2 \vee h) \wedge (\overline{h} \vee x_3 \vee \cdots \vee x_k)$
- ▷ *Uma cláusula de tamanho k é transformada em $(k-2)$ cláusulas de tamanho 3.*
- ▷ *Uma expressão $E = C_1 \wedge \cdots \wedge C_p$ onde C_i possui k_i literais é transformada em uma expressão E' com no máximo $(\sum k_i) - 2p$ cláusulas de tamanho 3.*
- ▷ *Se E possui $\ell = \sum k_i$ literais E' possui $3(\ell - 2p)$ literais*

3-coloração

DADOS:	Um grafo G
OBJETIVO:	G admite uma 3-coloração própria?

3-coloração

DADOS:	Um grafo G
OBJETIVO:	G admite uma 3-coloração própria?

Teorema

3-coloração é NP-Completo

3-coloração

DADOS:	Um grafo G
OBJETIVO:	G admite uma 3-coloração própria?

Teorema

3-coloração é NP-Completo

Prova

- $\triangleright$ $\mathit{SAT} \propto$ 3-*coloração*

3-coloração

DADOS:	Um grafo G
OBJETIVO:	G admite uma 3-coloração própria?

Teorema

3-coloração é NP-Completo

Prova

- $\triangleright$ *SAT* $\propto$ *3-coloração*
- $\triangleright$ *Seja* $E = C_1 \wedge \cdots \wedge C_k$ *uma expressão Booleana*

3-coloração

DADOS:	Um grafo G
OBJETIVO:	G admite uma 3-coloração própria?

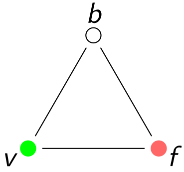
Teorema

3-coloração é NP-Completo

Prova

- *SAT* $\propto$ *3-coloração*
- *Seja* $E = C_1 \wedge \cdots \wedge C_k$ *uma expressão Booleana*
- *Definimos três artefatos: base, variável, cláusula*

Prova



Triângulo base

Artefato Variável

Artefato Cláusula

- um triângulo base

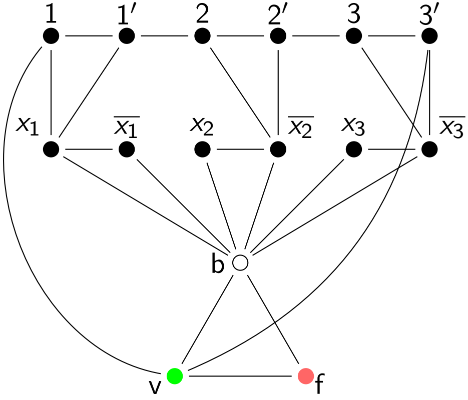
- um artefato variável para cada variável

- os dois vértices de cada artefato variável são ligados ao vértice b do triângulo base

- os vértices finais de cada artefato cláusula são ligados ao vértice v do triângulo base

- para $i \in \{1, 2, 3\}$, os vértices i e i'
  de cada artefato cláusula
  são ligados ao vértice do artefato variável
  correspondente ao literal presente em sua cláusula

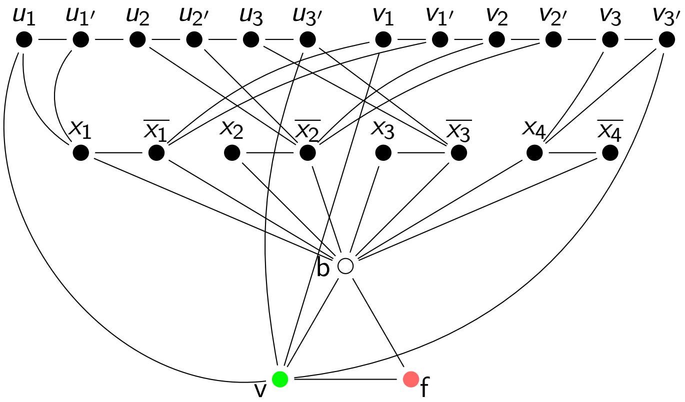
$(x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3})$



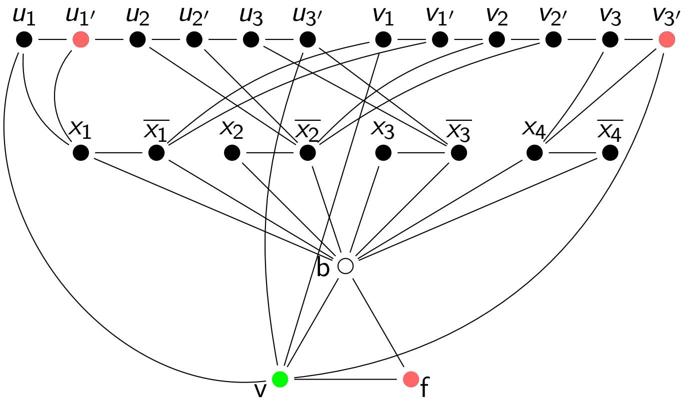
Lema

Seja G o grafo obtido pelo processo acima. Se existe uma 3-coloração de G tal que todo artefato cláusula possui pelo menos um vértice colorido com f, então E é satisfatível.

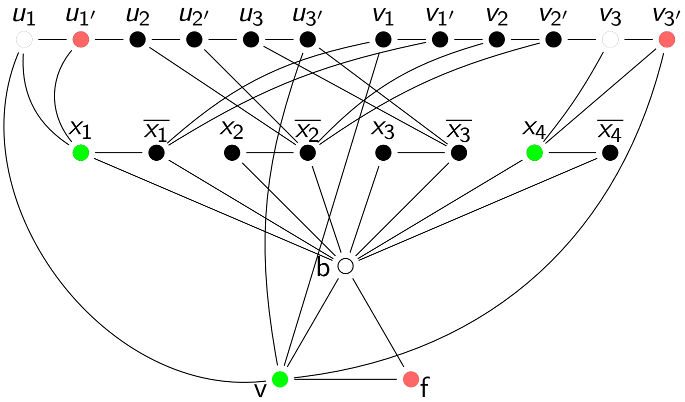
$$(x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}) \wedge (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_4)$$



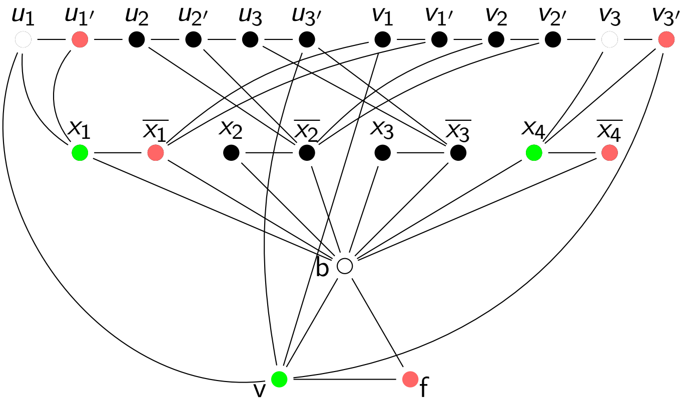
$$(x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}) \wedge (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_4)$$



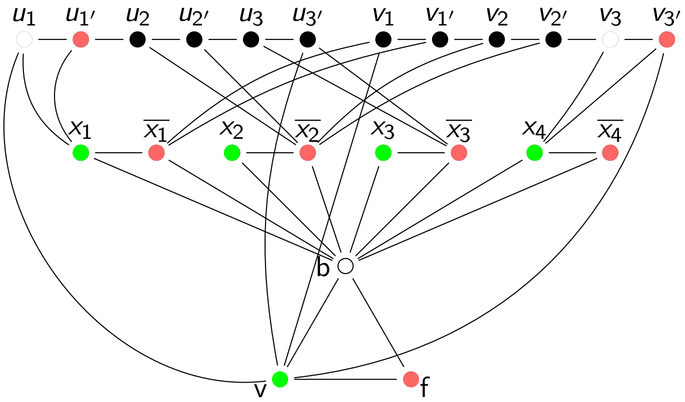
$$(x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}) \wedge (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_4)$$



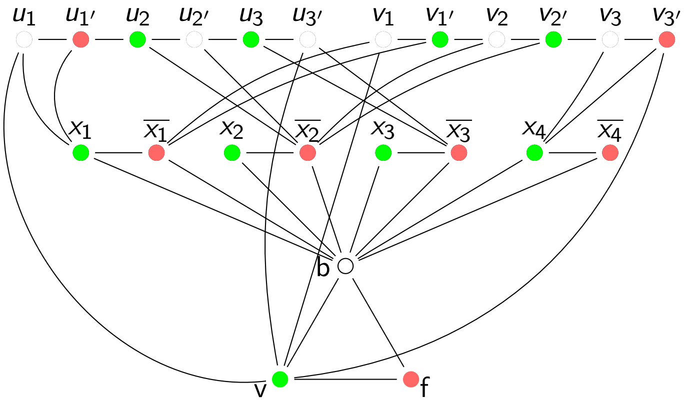
$$(x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}) \wedge (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_4)$$



$$(x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}) \wedge (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_4)$$



$$(x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}) \wedge (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_4)$$



Problemas NP-Completos

Fábio Botler

Programa de Engenharia de Sistemas e Computação
Universidade Federal do Rio de Janeiro