

## Lista 3 de Complexidade de Algoritmos - 2019.03

Data de entrega: 01/11/2019

**Definição.** Dizemos que um subgrafo  $C$  de um grafo  $G$  é um clique em  $G$ , se para todos  $x, y \in V(C)$ , temos  $xy \in E(G)$ ; dizemos que um conjunto  $I \subseteq V(G)$  é independente se para todos  $x, y \in I$ , temos  $xy \notin E(G)$ ; e dizemos que um conjunto  $S \subseteq V(G)$  é uma cobertura por vértices de  $G$ , se para toda aresta  $xy \in E(G)$ , temos  $x \in S$  ou  $y \in S$ .

Considere então os seguintes problemas.

### Clique máxima

1 **Problema:** MAXCLIQUE

**Dados:** um grafo  $G$

**Objetivo:** encontrar um maior clique  $C \subseteq V(G)$  em  $G$ .

1' **Problema:**  $k$ -CLIQUE

**Dados:** um grafo  $G$ , e um inteiro  $k$

**Objetivo:** decidir se há clique  $C \subseteq V(G)$  em  $G$  tal que  $|V(C)| \geq k$ .

### Conjunto Independente Máximo

2 **Problema:** MAXSTABLESET

**Dados:** um grafo  $G$

**Objetivo:** encontrar um maior conjunto *independente* em  $G$ .

2' **Problema:**  $k$ -STABLESET

**Dados:** um grafo  $G$ , e um inteiro  $k$

**Objetivo:** decidir se há conjunto independente de vértice  $I \subseteq V(G)$  em  $G$  tal que  $|I| \geq k$ .

### Cobertura Mínima por Vértices

3 **Problema:** MINVERTEXCOVER

**Dados:** um grafo  $G$

**Objetivo:** encontrar uma menor *cobertura por vértices*  $S \subseteq V(G)$  em  $G$ .

3' **Problema:**  $k$ -VERTEXCOVER

**Dados:** um grafo  $G$ , e um inteiro  $k$

**Objetivo:** decidir se há cobertura por vértices  $S \subseteq V(G)$  tal que  $|S| \leq k$ .

**Exercício 1.** Escolha  $i$  em  $\{1, 2, 3\}$ , considere o par de problemas  $i, i'$ , e mostre que:

1. podemos resolver  $i'$  com uma única execução de um algoritmo que resolva  $i$ .
2. podemos resolver  $i$  com um número polinomial (no tamanho de uma instância) de execuções de um algoritmo que resolva  $i'$ .

**Exercício 2.** Suponha que exista um algoritmo eficiente  $A_1$  para resolver o problema 1'. Construa algoritmos eficientes para resolver os problemas 2' e 3'.

**Exercício 3.** Mostre que o problema 1' é NP-completo.

Considere, agora, os problemas a seguir.

1 **Problema:** 2SAT

**Dados:** Um conjunto de variáveis booleanas  $U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$  e um conjunto de cláusulas  $\mathcal{C} = \{C_1, C_2, \dots, C_m\}$  sobre  $U$  tal que cada cláusula contém exatamente duas ocorrências de literais.

**Decisão:** Existe uma atribuição de verdade para as variáveis em  $U$  que satisfaz todas as cláusulas?

2 **Problema:** MAX2SAT

**Dados:** Um conjunto de variáveis booleanas  $U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ , um conjunto de cláusulas  $\mathcal{C} = \{C_1, C_2, \dots, C_m\}$  sobre  $U$  tal que cada cláusula contém exatamente duas ocorrências de literais e um inteiro positivo  $k$ .

**Decisão:** Existe uma atribuição de verdade para as variáveis em  $U$  que satisfaz ao menos  $k$  cláusulas?

3 **Problema:** 2-COLORAÇÃO

**Dados:** Um grafo  $G$ .

**Decisão:** O grafo  $G$  admite uma 2-coloração própria?

4 **Problema:** 4-COLORAÇÃO

**Dados:** Um grafo  $G$

**Decisão:** O grafo  $G$  admite uma 4-coloração própria?

5 **Problema:** CAMINHO HAMILTONIANO

**Dados:** Um grafo  $G$ .

**Decisão:** O grafo  $G$  admite um caminho hamiltoniano?

**Exercício 4.** *Mostre que o problema 1 e 3 são solucionáveis em tempo polinomial.*

**Exercício 5.** *Escolha dois dentre os problemas 2,4 e 5. Mostre que os problemas escolhidos são NP-completo.*

Esta lista foi publicada em 18/10/2019.