

Problemas NP-Completos

Fábio Botler

Programa de Engenharia de Sistemas e Computação
Universidade Federal do Rio de Janeiro

Aula passada

- ▶ A classe NP
- ▶ A questão P=NP
- ▶ Complementos de Problemas
- ▶ Transformações Polinomiais
- ▶ Alguns problemas NP-Completos

Aula de hoje

- ▶ Reduções de Karp ×
- ▶ Reduções de Cook
- ▶ Restrições e Extensões de Problemas
- ▶ Algoritmos superpolinomiais
- ▶ Isomorfismo de Grafos
- ▶ Algoritmos pseudopolinomiais
- ▶ Problemas numéricos

Definição

Uma **redução de Karp** é um processo f que transforma instâncias de um problema Π_1 em instâncias um problema Π_2 tal que:

- 1 $\Pi_1(I) = SIM$ se e somente se $\Pi_2(f(I)) = SIM$
- 2 f pode ser computada em tempo polinomial

Definição

Uma **redução de Karp** é um processo f que transforma instâncias de um problema Π_1 em instâncias um problema Π_2 tal que:

- 1 $\Pi_1(I) = SIM$ se e somente se $\Pi_2(f(I)) = SIM$
- 2 f pode ser computada em tempo polinomial

Definição alternativa

Uma **redução de Karp** de um problema Π_1 para um problema Π_2 é um algoritmo que resolve Π_1 fazendo uma chamada a uma subrotina que resolve o problema Π_2 , e que toma tempo polinomial fora dessa chamada.

Definição

Uma **redução de Cook** de um problema Π_1 para um problema Π_2 é um algoritmo que resolve Π_1 fazendo um número polinomial de chamadas a uma subrotina que resolve o problema Π_2 , e que toma tempo polinomial fora dessas chamadas.

Resolve $\Pi_1(G)$

$L = \text{CRIA LISTA Poly}(G)$

For $G' \in L$

Resolve $\Pi_2(G')$

Cook $\rightsquigarrow |L| = \text{Poly}$

$\text{Poly} \quad \left[\begin{array}{c} \text{Poly} \\ \text{Poly} \end{array} \right]$

Definição

Uma **redução de Cook** de um problema Π_1 para um problema Π_2 é um algoritmo que resolve Π_1 fazendo um número polinomial de chamadas a uma subrotina que resolve o problema Π_2 , e que toma tempo polinomial fora dessas chamadas.

Definição alternativa

Uma **redução de Cook** é um processo f que transforma instâncias de um problema Π_1 em conjuntos de instâncias de um problema Π_2 tal que:

- 1 $\Pi_1(I) = \text{SIM}$ se e somente se $\text{SIM} \in \{\Pi_2(I'): I' \in f(I)\}$
- 2 f pode ser computada em tempo polinomial

Restrições e Extensões de problemas

$\Pi'(D', Q')$ é uma **restrição** de $\Pi(D, Q)$ se

- (i) $D' \subseteq D$
- (ii) $Q' = Q$

Também dizemos que Π é uma **extensão** de Π' .

~~Usamos restrições de problemas~~

(

)

Exemplo: SAT × 3SAT

SAT

$(\underline{\quad}) \wedge (\underline{\quad}) \wedge \dots \wedge (\underline{\quad})$

DADOS: Uma expressão booleana E
na Forma Normal Conjuntiva (FNC)

OBJETIVO: E é satisfatível?

3SAT

$(\vee \vee) \wedge (\vee \vee) \wedge (\vee \vee) \dots$

DADOS: Uma expressão booleana E
na Forma Normal Conjuntiva (FNC)
contendo apenas cláusulas com *três literais*

OBJETIVO: E é satisfatível?

▷ 3SAT é restrição de SAT.

Clique

Clique

DADOS: Um grafo G e um inteiro k

OBJETIVO: G possui uma clique
de tamanho pelo menos k ?

Clique

Clique

DADOS: Um grafo G e um inteiro k

OBJETIVO: G possui uma clique
de tamanho pelo menos k ?

Clique'

↑
EQUIV.
↓

$f(G, k) = (G, K_k)$
 $g(G, K_k) = (G, k)$

DADOS: Um grafo G e uma clique H

OBJETIVO: G possui um subgrafo isomorfo a H ?

Exemplo: Clique \times Isomorfismo de Subgrafo

Clique'

DADOS: Um grafo G e uma clique H

OBJETIVO: G possui um subgrafo isomorfo a H ?

Exemplo: Clique \times Isomorfismo de Subgrafo

Clique'

DADOS: Um grafo G e uma clique H

OBJETIVO: G possui um subgrafo isomorfo a H ?

Isomorfismo de Subgrafo

DADOS: Um grafo G e um grafo H

OBJETIVO: G possui um subgrafo isomorfo a H ?

Exemplo: Clique \times Isomorfismo de Subgrafo

Clique'

DADOS: Um grafo G e uma clique H

OBJETIVO: G possui um subgrafo isomorfo a H ?

Isomorfismo de Subgrafo

DADOS: Um grafo G e um grafo H

OBJETIVO: G possui um subgrafo isomorfo a H ?

▷ Clique' é restrição de Isomorfismo de Subgrafo.

←
É EXTENSÃO

Lema

*Sejam Π e Π' problemas de decisão tais que Π' é restrição de Π .
Se Π' é NP-Completo, então Π é NP-Difícil.*

Lema

Sejam Π e Π' problemas de decisão tais que Π' é restrição de Π . Se Π' é NP-Completo, então Π é NP-Difícil.

▷ Se $\Pi \in NP$, então Π é NP-Completo

$$\pi'' \in \text{NP} \subset \pi' \subset \pi$$

Lema

Sejam Π e Π' problemas de decisão tais que Π' é restrição de Π .
Se Π' é NP-Completo, então Π é NP-Difícil.

- ▷ Se $\Pi \in NP$, então Π é NP-Completo
- ▷ Se Π é NP-Completo,
não necessariamente Π' é NP-Completo

Lema

Sejam Π e Π' problemas de decisão tais que Π' é restrição de Π .

Se Π' é NP-Completo, então Π é NP-Difícil.

- ▷ Método alternativo para provar
que um problema é NP-Completo

Lema

Sejam Π e Π' problemas de decisão tais que Π' é restrição de Π .

Se Π' é NP-Completo, então Π é NP-Difícil.

- ▷ Método alternativo para provar
que um problema é NP-Completo

Π é NP-Completo se

Lema

Sejam Π e Π' problemas de decisão tais que Π' é restrição de Π . Se Π' é NP-Completo, então Π é NP-Difícil.

- ▷ Método alternativo para provar que um problema é NP-Completo

Π é NP-Completo se

- (i) $\Pi \in NP$
- (ii) Π é extensão de um problema NP-Completo

Isomorfismo de subgrafos

Teorema

Isomorfismo de subgrafos é *NP-Completo*.

Isomorfismo de subgrafos

Teorema

Isomorfismo de subgrafos é *NP-Completo*.

Prova

Isomorfismo de subgrafos está em *NP*

Isomorfismo de subgrafos

Teorema

Isomorfismo de subgrafos é *NP-Completo*.

Prova

Isomorfismo de subgrafos está em *NP*

Isomorfismo de subgrafos é extensão de *Clique'*

Isomorfismo de subgrafos

Teorema

Isomorfismo de subgrafos é *NP-Completo*.

Prova

Isomorfismo de subgrafos está em *NP*

Isomorfismo de subgrafos é extensão de *Clique'*

Clique' é *NP-Completo*

Isomorfismo de Grafos

DADOS: Um grafo G e um grafo H

OBJETIVO: G é isomorfo a H ?

- ▷ Isomorfismo de Grafos é **restrição**
de Isomorfismo de subrafos

Exemplo

3SAT é NP-Completo?

Exemplo

3SAT é NP-Completo? Não devido ao lema anterior

Exemplo

3SAT é NP-Completo? Não devido ao lema anterior

Teorema

3SAT é NP-Completo

Exemplo

3SAT é NP-Completo? Não devido ao lema anterior

Teorema

3SAT é NP-Completo

Prova

$\triangleright SAT \propto 3SAT$

Exemplo

$3SAT$ é NP -Completo? Não devido ao lema anterior

Teorema

$3SAT$ é NP -Completo

Prova

▷ $SAT \propto 3SAT$

$$\triangleright (x_1 \vee x_2 \vee \cdots \vee x_k) = \underbrace{(x_1 \vee x_2 \vee h)}_{\text{blue wavy line}} \wedge \underbrace{(\bar{h} \vee x_3 \vee \cdots \vee x_k)}_{\text{blue wavy line}}$$

Exemplo

$3SAT$ é NP -Completo? Não devido ao lema anterior

Teorema

$3SAT$ é NP -Completo

Prova

▷ $SAT \propto 3SAT$

▷ $(x_1 \vee x_2 \vee \dots \vee x_k) = (\underline{x_1 \vee x_2 \vee h}) \wedge (\overbrace{\bar{h} \vee x_3 \vee \dots \vee x_k}^{k-1})$

▷ Uma cláusula de tamanho k é transformada
em $(k - 2)$ cláusulas de tamanho 3.

Exemplo

$3SAT$ é NP -Completo? Não devido ao lema anterior

Teorema

$3SAT$ é NP -Completo

Prova

- ▷ $SAT \propto 3SAT$
- ▷ $(x_1 \vee x_2 \vee \cdots \vee x_k) = (x_1 \vee x_2 \vee h) \wedge (\bar{h} \vee x_3 \vee \cdots \vee x_k)$
- ▷ Uma cláusula de tamanho k é transformada em $(k - 2)$ cláusulas de tamanho 3.
- ▷ Uma expressão $E = C_1 \wedge \cdots \wedge C_p$ onde C_i possui k_i literais

Exemplo

$3SAT$ é NP -Completo? Não devido ao lema anterior

Teorema

$3SAT$ é NP -Completo

Prova

- ▷ $SAT \propto 3SAT$
- ▷ $(x_1 \vee x_2 \vee \dots \vee x_k) = (x_1 \vee x_2 \vee h) \wedge (\bar{h} \vee x_3 \vee \dots \vee x_k)$
- ▷ Uma cláusula de tamanho k é transformada em $(k - 2)$ cláusulas de tamanho 3.
- ▷ Uma expressão $E = C_1 \wedge \dots \wedge C_p$ onde C_i possui k_i literais é transformada em uma expressão E' com no máximo $(\sum k_i) - 2p$ cláusulas de tamanho 3.

$$f(\varepsilon) = \in 3SAT$$

Exemplo

$3SAT$ é NP -Completo? Não devido ao lema anterior

Teorema

$3SAT$ é NP -Completo

Prova

- ▷ $SAT \propto 3SAT$
- ▷ $(x_1 \vee x_2 \vee \cdots \vee x_k) = (x_1 \vee x_2 \vee h) \wedge (\bar{h} \vee x_3 \vee \cdots \vee x_k)$
- ▷ Uma cláusula de tamanho k é transformada em $(k - 2)$ cláusulas de tamanho 3.
- ▷ Uma expressão $E = C_1 \wedge \cdots \wedge C_p$ onde C_i possui k_i literais é transformada em uma expressão E' com no máximo $(\sum k_i) - 2p$ cláusulas de tamanho 3.
- ▷ Se E possui $\ell = \sum k_i$ literais

Exemplo

$3SAT$ é NP -Completo? Não devido ao lema anterior

Teorema

$3SAT$ é NP -Completo

$$(x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4)^T$$

$$\Rightarrow (x_1 \vee x_2 \vee h_1) \wedge (\bar{h}_1 \vee x_3 \vee x_4)$$

Prova

- ▷ $SAT \propto 3SAT$
- ▷ $(x_1 \vee x_2 \vee \dots \vee x_k) \Leftrightarrow (x_1 \vee x_2 \vee h) \wedge (\bar{h} \vee x_3 \vee \dots \vee x_k)$
- ▷ Uma cláusula de tamanho k é transformada em $(k-2)$ cláusulas de tamanho 3. $(k-2)p$
- ▷ Uma expressão $E = C_1 \wedge \dots \wedge C_p$ onde C_i possui k_i literais é transformada em uma expressão E' com no máximo $(\sum k_i) - 2p$ cláusulas de tamanho 3.
- ▷ Se E possui $\ell = \sum k_i$ literais E' possui $3(\ell - 2p)$ literais

3-coloração

1, 2, 3



DADOS: Um grafo G

OBJETIVO: G admite uma 3-coloração própria?

3-coloração

DADOS: Um grafo G

OBJETIVO: G admite uma 3-coloração própria?

Teorema

3-coloração é *NP-Completo*

3-coloração

DADOS: Um grafo G

OBJETIVO: G admite uma 3-coloração própria?

Teorema

3-coloração é NP-Completo

Prova

$\triangleright \text{3SAT} \propto \text{3-coloração}$

3-coloração

DADOS: Um grafo G

OBJETIVO: G admite uma 3-coloração própria?

Teorema

3-coloração é NP-Completo

Prova

▷ $SAT \propto 3\text{-coloração}$

▷ Seja $E = C_1 \wedge \cdots \wedge C_k$ uma expressão Booleana

3-coloração

DADOS: Um grafo G

OBJETIVO: G admite uma 3-coloração própria?

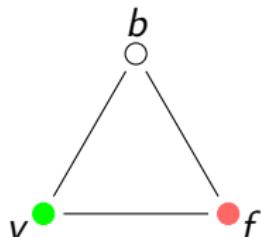
Teorema

3-coloração é NP-Completo

Prova

- ▷ $SAT \propto 3\text{-coloração}$
- ▷ Seja $E = C_1 \wedge \cdots \wedge C_k$ uma expressão Booleana
- ▷ Definimos três artefatos: base, variável, cláusula

Prova



Triângulo base



Artefato Variável

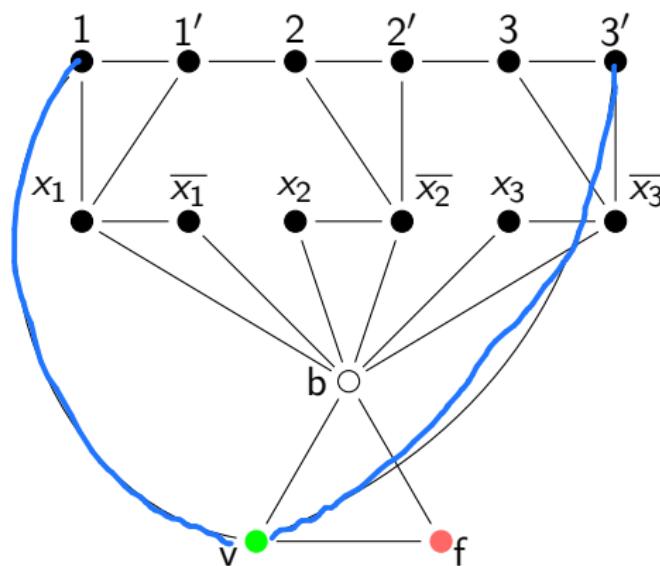


Artefato Cláusula



- ▷ um triângulo base
- ▷ um artefato variável para cada variável
- ▷ os dois vértices de cada artefato variável são ligados ao vértice b do triângulo base
- ▷ os vértices finais de cada artefato cláusula são ligados ao vértice v do triângulo base
- ▷ para $i \in \{1, 2, 3\}$, os vértices i e i' de cada artefato cláusula são ligados ao vértice do artefato variável correspondente ao literal presente em sua cláusula

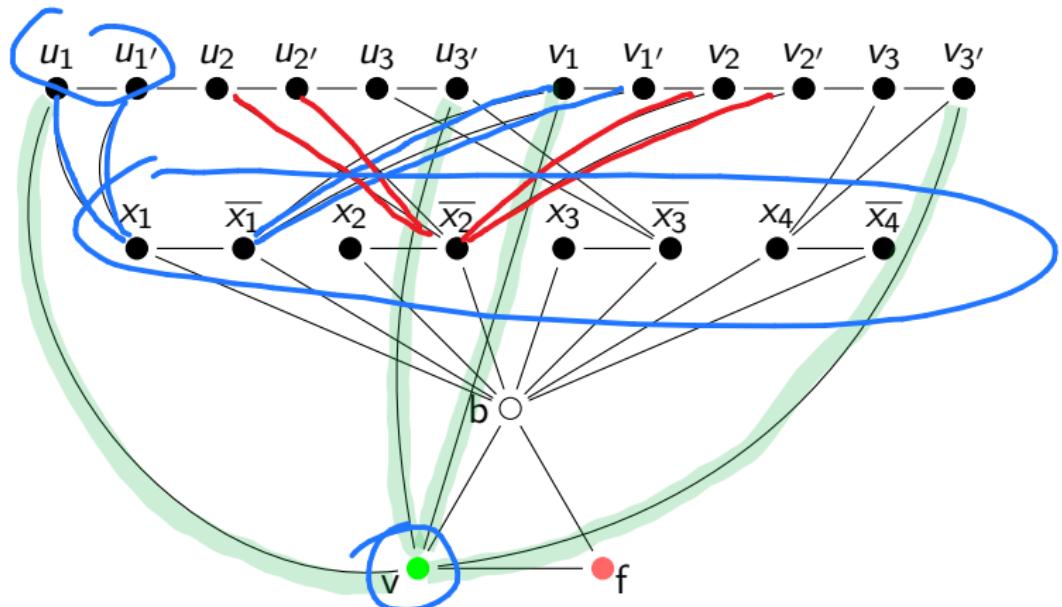
$$(x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3})$$



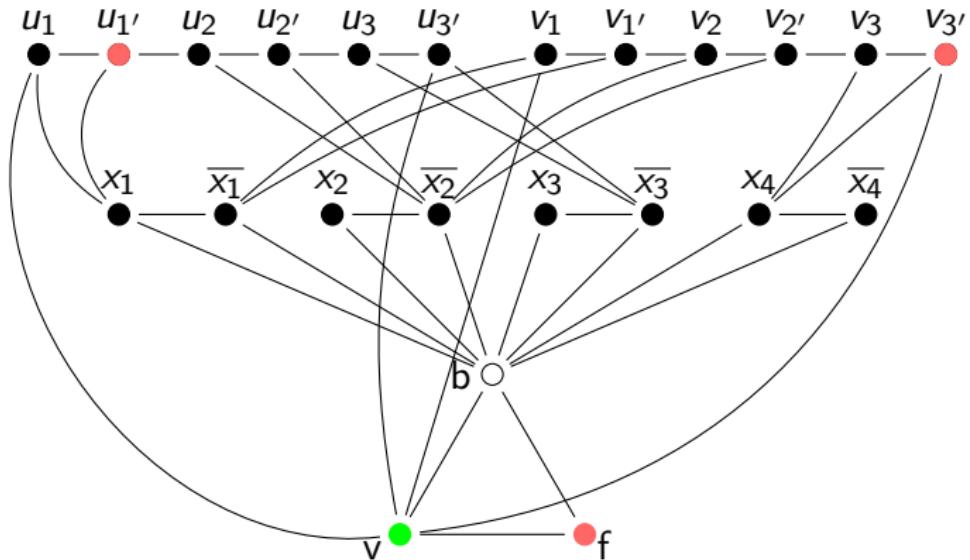
Lema

Seja G o grafo obtido pelo processo acima. Se existe uma 3-coloração de G então E é satisfatível.

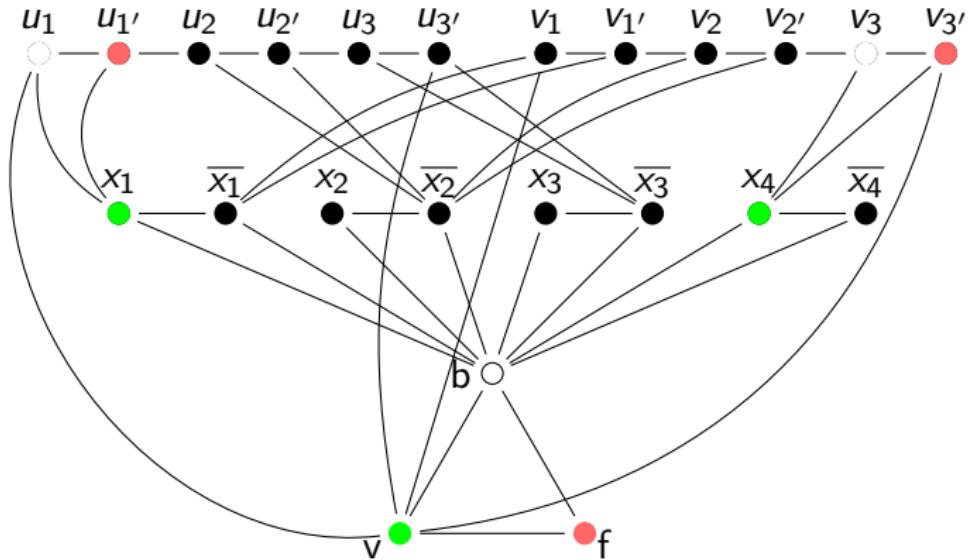
$$(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3) \wedge (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_4)$$



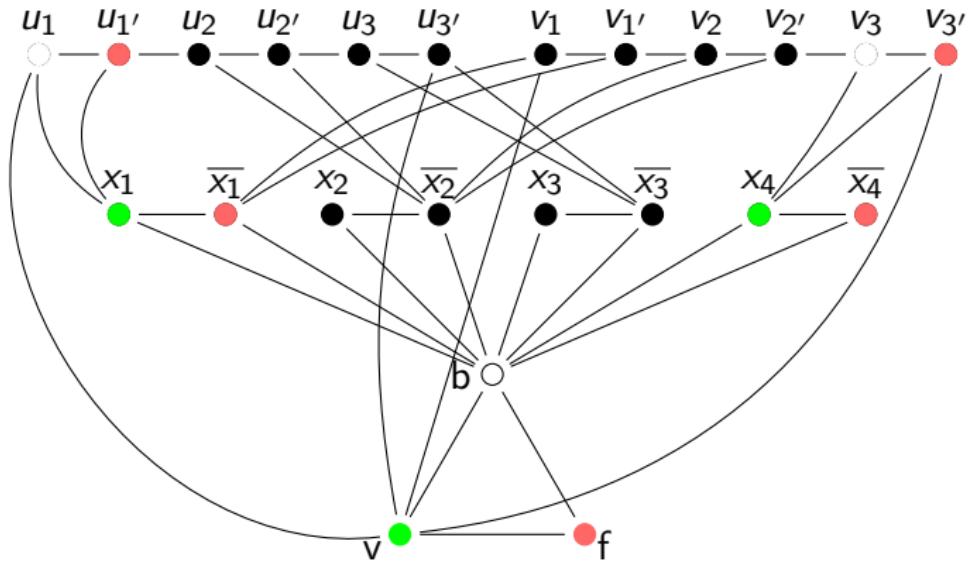
$$(x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}) \wedge (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_4)$$



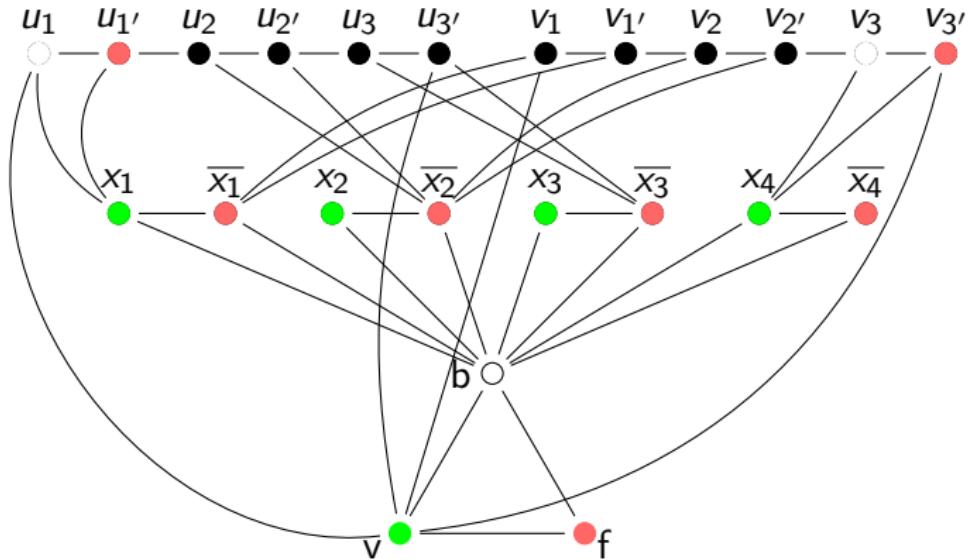
$$(x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}) \wedge (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_4)$$



$$(x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}) \wedge (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_4)$$

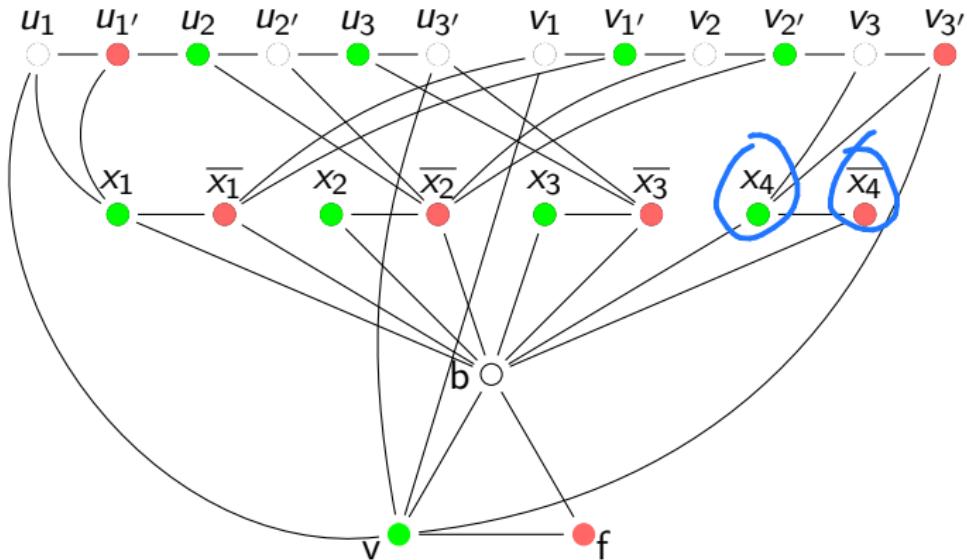


$$(x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}) \wedge (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_4)$$



\top

$$(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3) \wedge (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_4)$$



Definição

Um algoritmo é **superpolinomial** se sua complexidade é $\omega(n^c)$ para toda constante c .

Definição

Um algoritmo é **exponencial** se sua complexidade é $2^{O(n^c)}$ para alguma constante c .

$$2^{n^{1000}}$$
$$2^{7n^8 + 5n^{100}}$$

Definição (sem consenso)

Um algoritmo é **subexponencial** se sua complexidade é $2^{o(n)}$.

Definição

Um algoritmo é **quasipolinomial** quando sua complexidade é $2^{O((\log n)^c)}$ para alguma constante c .

$$2^{3(\log n)^7 + 5\log n}$$

Poly log Polinômio em $\log n$

Isomorfismo de Grafos

DADOS: Um grafo G e um grafo H

OBJETIVO: G é isomorfo a H ?

Isomorfismo de Grafos

DADOS: Um grafo G e um grafo H

OBJETIVO: G é isomorfo a H ?

- ▷ Isomorfismo de Grafos é **restrição**
de Isomorfismo de subgrafos (que é NP-Completo)

Isomorfismo de Grafos

DADOS: Um grafo G e um grafo H

OBJETIVO: G é isomorfo a H ?

▷ Isomorfismo de Grafos é **restrição**
de Isomorfismo de subgrafos (que é NP-Completo)

Teorema (Babai, 2015+)

*Isomorfismo de Grafos pode ser resolvido em tempo
quasipolinomial.*

Algoritmos Pseudopolinomiais

Definição

*Um algoritmo é **pseudopolinomial** se sua complexidade for polinomial no tamanho da instância quando codificada em unário.*

Definição

*Um algoritmo é **pseudopolinomial** se sua complexidade for polinomial no tamanho da instância quando codificada em unário.*

Valores \times Tamanho

Definição

*Um algoritmo é **pseudopolinomial** se sua complexidade for polinomial no tamanho da instância quando codificada em unário.*

Valores \times Tamanho

Exemplo

Algoritmo natural para Fatorização de Inteiros: $O(n)$

Definição

*Um algoritmo é **pseudopolinomial** se sua complexidade for polinomial no tamanho da instância quando codificada em unário.*

Valores \times Tamanho

Exemplo

Algoritmo natural para Fatorização de Inteiros: $O(n)$

Exemplo

Algoritmo de programação dinâmica para o Problema da Mochila: $O(nW)$

Definição

*Um problema NP-Completo que admite algoritmo pseudopolinomial é chamado **NP-Completo fraco**.*

Definição

*Um problema NP-Completo que admite algoritmo pseudopolinomial é chamado **NP-Completo fraco**.*

Exemplo

O Problema da Mochila

Exemplo

Círcuito Hamiltoniano:

- ▷ *o valor do maior dado de entrada (índices de vértices/arestas) é polinomial no tamanho do grafo.*
- ▷ *Representar tais dados em forma unária não muda a natureza do tamanho dos dados, i.e., os dados continuam polinomiais.*

Exemplo

Circuito Hamiltoniano:

- ▷ *o valor do maior dado de entrada (índices de vértices/arestas) é polinomial no tamanho do grafo.*
- ▷ *Representar tais dados em forma unária não muda a natureza do tamanho dos dados, i.e., os dados continuam polinomiais.*
- ▷ *Um algoritmo pseudopolinomial, nesse caso, é um algoritmo polinomial.*

- ▷ Há problemas NP-Completos para os quais a existência de algoritmos pseudopolinomiais implica em $P = NP$.

- ▷ Há problemas NP-Completos para os quais a existência de algoritmos pseudopolinomiais implica em $P = NP$.

Definição

*Um problema NP-Completo para o qual a existência de um algoritmo pseudopolinomial que o decida implica na existência de um algoritmo polinomial que o decida é chamado **NP-Completo forte**.*

- ▷ Há problemas NP-Completos para os quais a existência de algoritmos pseudopolinomiais implica em $P = NP$.

Definição

*Um problema NP-Completo para o qual a existência de um algoritmo pseudopolinomial que o decide implica na existência de um algoritmo polinomial que o decide é chamado **NP-Completo forte**.*

- ▷ Todos os problemas com a “natureza” do Problema Circuito Hamiltoniano são NP-Completos fortes

Caixeiro-viajante

DADOS: Um grafo completo G com pesos $w: E(G) \rightarrow \mathbb{N}$,
e um inteiro k

OBJETIVO: G possui um circuito Hamiltoniano
com peso no máximo k ?

Caixeiro-viajante

DADOS: Um grafo completo G com pesos $w: E(G) \rightarrow \mathbb{N}$,
e um inteiro k

OBJETIVO: G possui um circuito Hamiltoniano
com peso no máximo k ?

▷ É NP-Completo:

Círculo Hamiltoniano \propto Caixeiro-viajante:

Dado grafo G , seja G' um grafo completo
tal que $V(G') = V(G)$, e faça

$$w(e) = 1 \text{ se } e \in E(G)$$

$$w(e) = 2 \text{ se } e \notin E(G)$$

Caixeiro-viajante

DADOS: Um grafo completo G com pesos $w: E(G) \rightarrow \mathbb{N}$,
e um inteiro k

OBJETIVO: G possui um circuito Hamiltoniano
com peso no máximo k ?

▷ É NP-Completo:

Círculo Hamiltoniano \propto Caixeiro-viajante:

Dado grafo G , seja G' um grafo completo
tal que $V(G') = V(G)$, e faça

$$w(e) = 1 \text{ se } e \in E(G)$$

$$w(e) = 2 \text{ se } e \notin E(G)$$

▷ Claramente, G possui circuito Hamiltoniano
se e somente se

G' possui um circuito Hamiltoniano de peso no máximo n .

Exemplo

Seja $W = \sum_{e \in E(G)} w(e)$, e suponha que exista um algoritmo A de complexidade $O((nWk)^c)$ que decida Caixeiro-viajante, para algum $c \in \mathbb{N}$.

Exemplo

Seja $W = \sum_{e \in E(G)} w(e)$, e suponha que exista um algoritmo A de complexidade $O((nWk)^c)$ que decida Caixeiro-viajante, para algum $c \in \mathbb{N}$.

Esse algoritmo aplicado na instância obtida (G', w, n) é polinomial no tamanho de G , pois W e n são polinomiais em n .

Exemplo

Seja $W = \sum_{e \in E(G)} w(e)$, e suponha que exista um algoritmo A de complexidade $O((nWk)^c)$ que decida Caixeiro-viajante, para algum $c \in \mathbb{N}$.

Esse algoritmo aplicado na instância obtida (G', w, n) é polinomial no tamanho de G , pois W e n são polinomiais em n .

Logo, isso implica $P = NP$.

Exemplo

Seja $W = \sum_{e \in E(G)} w(e)$, e suponha que exista um algoritmo A de complexidade $O((nWk)^c)$ que decida *Caixeiro-viajante*, para algum $c \in \mathbb{N}$.

Esse algoritmo aplicado na instância obtida (G', w, n) é polinomial no tamanho de G , pois W e n são polinomiais em n .

Logo, isso implica $P = NP$.

Portanto, *Caixeiro-viajante* é *NP-Completo forte*.

Um algoritmo pseudopolinomial é polinomial para instâncias nas quais o valor do maior dado é polinomial no tamanho da instância.

Um algoritmo pseudopolinomial é polinomial para instâncias nas quais o valor do maior dado é polinomial no tamanho da instância.

Exemplo

O Problema da Mochila:

Um algoritmo pseudopolinomial é polinomial para instâncias nas quais o valor do maior dado é polinomial no tamanho da instância.

Exemplo

O Problema da Mochila:

Se o peso total W for polinomial no tamanho da instância, i.e., $W = O(n^c)$, então o algoritmo $O(nW)$ é $O(n^{c+1})$.

Problemas Numéricos

Definição

*Um problema no qual o valor do maior dado de uma instância não é necessariamente polinomial no tamanho da instância é chamado de **Problema Numérico**.*

Definição

*Um problema no qual o valor do maior dado de uma instância não é necessariamente polinomial no tamanho da instância é chamado de **Problema Numérico**.*

Exemplo

Problema da Mochila

Definição

*Um problema no qual o valor do maior dado de uma instância não é necessariamente polinomial no tamanho da instância é chamado de **Problema Numérico**.*

Exemplo

Problema da Mochila

Exemplo

Fatorização de Inteiros

Como mostramos que um problema Π é NP-Completo fraco?

Como mostramos que um problema Π é NP-Completo fraco?

- ▷ Basta mostrar um algoritmo pseudopolinomial que o resolva

Como mostramos que um problema Π é NP-Completo fraco?

- ▷ Basta mostrar um algoritmo pseudopolinomial que o resolva

Como mostramos que um problema Π é NP-Completo forte?

Como mostramos que um problema Π é NP-Completo fraco?

- ▷ Basta mostrar um algoritmo pseudopolinomial que o resolva

Como mostramos que um problema Π é NP-Completo forte?

- ▷ Mostramos que se houver algoritmo pseudopolinomial para Π então existe algoritmo polinomial para um problema NP-Completo

Como mostramos que um problema Π é NP-Completo fraco?

- ▷ Basta mostrar um algoritmo pseudopolinomial que o resolva

Como mostramos que um problema Π é NP-Completo forte?

- ▷ Mostramos que se houver algoritmo pseudopolinomial para Π então existe algoritmo polinomial para um problema NP-Completo
- ▷ Equivalentemente, mostramos que há uma restrição de Π que é NP-Completa

Subconjunto Soma

DADOS: Um conjunto finito $S \subseteq \mathbb{N}$
e um inteiro t

OBJETIVO: existe $S' \subseteq S$ tal que $\sum_{s \in S'} s = t$?

Subconjunto Soma

DADOS: Um conjunto finito $S \subseteq \mathbb{N}$
e um inteiro t

OBJETIVO: existe $S' \subseteq S$ tal que $\sum_{s \in S'} s = t$?

- ▷ É um problema numérico, pois o valor de $s \in S$ não é limitado pelo tamanho de S .

Teorema

Subconjunto Soma é NP-Completo.

Teorema

Subconjunto Soma é NP-Completo.

Prova

▷ *Cobertura por Vértices* \propto *Subconjunto Soma*

Teorema

Subconjunto Soma é NP-Completo.

Prova

- ▷ *Cobertura por Vértices* \propto *Subconjunto Soma*
- ▷ *Seja (G, k) uma instância*
do problema Cobertura por Vértices.
- ▷ *Ordene as arestas e fixe os índices delas*

Teorema

Subconjunto Soma é NP-Completo.

Prova

- ▷ Cobertura por Vértices \propto Subconjunto Soma
- ▷ Seja (G, k) uma instância
do problema Cobertura por Vértices.
- ▷ Ordene as arestas e fixe os índices delas
- ▷ Para a i -ésima aresta e_i , seja $s_{e_i} = 4^i$

Teorema

Subconjunto Soma é NP-Completo.

Prova

- ▷ Cobertura por Vértices \propto Subconjunto Soma
- ▷ Seja (G, k) uma instância do problema Cobertura por Vértices.
- ▷ Ordene as arestas e fixe os índices delas
- ▷ Para a i -ésima aresta e_i , seja $s_{e_i} = 4^i$
- ▷ Para $v \in V(G)$, seja $E(v)$ o conjunto de arestas incidentes a v e seja

$$s_v = 4^m + \sum_{e \in E(v)} s_e$$

Teorema

Subconjunto Soma é NP-Completo.

Prova

- ▷ Cobertura por Vértices \propto Subconjunto Soma
- ▷ Seja (G, k) uma instância do problema Cobertura por Vértices.
- ▷ Ordene as arestas e fixe os índices delas
- ▷ Para a i -ésima aresta e_i , seja $s_{e_i} = 4^i$
- ▷ Para $v \in V(G)$, seja $E(v)$ o conjunto de arestas incidentes a v e seja

$$s_v = 4^m + \sum_{e \in E(v)} s_e$$

- ▷ Seja $t = k4^m + \sum_{e \in E(G)} 2s_e$

Prova

$$\triangleright S = \{s_x : x \in V(G) \cup E(G)\}.$$

Prova

- ▷ $S = \{s_x : x \in V(G) \cup E(G)\}$.
- ▷ *G possui uma cobertura por vértices de tamanho k se e somente se existe $S' \subseteq S$ tal que $\sum_{s \in S'} s = t$*

Teorema

Subconjunto Soma é NP-Completo fraco.

Teorema

- ▷ *Existe algoritmo de programação dinâmica de complexidade $O(n(t + 1))$ que resolve Subconjunto Soma.*
- ▷ *Para cada $k \in \{1, \dots, n\}$, seja $S_k = \{s_1, \dots, s_k\}$.*
- ▷ *Temos que $\text{Subconjunto Soma}(S_k, t) = \text{SIM}$ se e somente se $\text{Subconjunto Soma}(S_{k-1}, t) = \text{SIM}$ ou $\text{Subconjunto Soma}(S_{k-1}, t - s_k) = \text{SIM}$.*

Denotaremos por $x_{i,j}$ o resultado de Subconjunto Soma(S_i, j)

Subconjunto Soma(S, t)

Para cada $i = 1, \dots, n$

$x_{i,0} = \text{SIM}$

Para cada $j = 1, \dots, t$

Para cada $i = 1, \dots, n$

se $x_{i-1,j} = \text{SIM}$ ou $x_{i-1,j-s_j} = \text{SIM}$,

então $x_{i,j} = \text{SIM}$

senão $x_{i,j} = \text{NÃO}$

Retorna $x_{n,t}$

Problemas NP-Completos

Fábio Botler

Programa de Engenharia de Sistemas e Computação
Universidade Federal do Rio de Janeiro