PROBABILIDADE

- ESPAÇO AMOSTRAL Ω: CONJUNTO DE TODOS OS POSSÍVEIS RESULTADOS DE UM EXPERIMENTO ALEATÓRIO

  EX: FACES DE UM DADO $\Omega = \{1, \ldots, 6\}$

- EVENTO: QUALQUER SUBCONJUNTO DE Ω

  EX: FACES PARES $A = \{2, 4, 6\}$

- EVENTO ELEMENTAR: EVENTO DO TIPO $A = \{r\}$

  EX: $A = \{3\}$

- FUNÇÃO DE PROBABILIDADE: FUNÇÃO $Pr : \Omega \to [0, 1]$ T.Q. $\sum_{w \in \Omega} Pr(w) = 1$

  → ESTENDEMOS PARA SUBCONJUNTOS DE Ω: SE $A \subseteq \Omega$, ENTÃO $Pr(A) = \sum_{w \in A} Pr(w)$

  1. PARA TODO $A \subseteq \Omega$, TEMOS $Pr(A) \in [0, 1]$
  2. $Pr(\Omega) = 1$
  3. SE $A_1, \ldots, A_k$ SÃO EVENTOS DISJUNTOS, ENTÃO $Pr\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right) = \sum_{i=1}^{k} Pr(A_i)$

Princípio da Inclusão e Exclusão

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

$$\left|\bigcup A_i\right| = \sum |A_i| - \sum_{i<j} |A_i \cap A_j| + \sum_{i<j<k} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \dots$$

4. Se $A_1, \dots, A_k \subseteq \Omega$, então

$$\Pr\left(\bigcup A_i\right) = \sum \Pr(A_i) - \sum_{i<j} \Pr(A_i \cap A_j) + \sum_{i<j<k} \Pr(A_i \cap A_j \cap A_k) - \dots$$

Cota da União

$$\left|\bigcup A_i\right| \leq \sum |A_i|$$

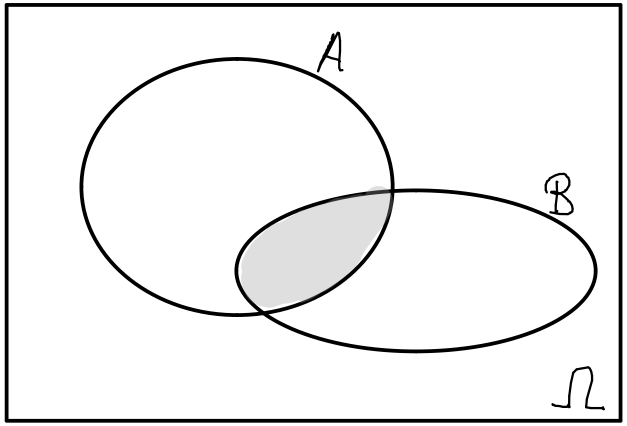
→ Versão fraca do P.I.E.

5. Se $A_1, \dots, A_k \subseteq \Omega$, então $\Pr\left(\bigcup A_i\right) \leq \sum \Pr(A_i)$

PROBABILIDADE CONDICIONAL

- A PROB. DE OCORRER UM EVENTO A, SABENDO QUE OCORRE UM EVENTO B

$$Pr(A \mid B) = \frac{Pr(A \cap B)}{Pr(B)}$$



EX: DADOS HONESTOS. QUAL A PROBABILIDADE DE SAIR 2 SABENDO QUE SAIU PAR?

$$Pr(2 \mid \text{foi par}) = \frac{Pr(\{2\} \cap \{2,4,6\})}{Pr(\{2,4,6\})} = \frac{Pr(\{2\})}{Pr(\{2,4,6\})} = \frac{1/6}{1/2} = 1/3$$

- SE $Pr(A \mid B) = Pr(A)$, OU SEJA, $Pr(A \cap B) = Pr(A) \cdot Pr(B)$,

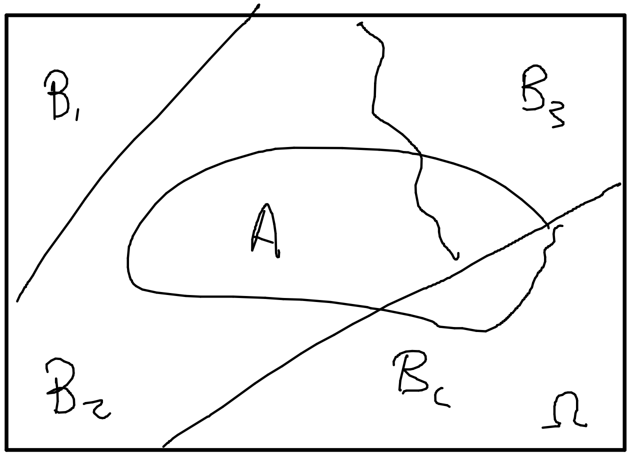
DIZEMOS QUE A E B SÃO **EVENTOS INDEPENDENTES**

Probabilidade total

- Seja $B_1, \dots, B_m$ uma partição de Ω em eventos disjuntos.

A prob. de um evento $A \subseteq \Omega$

$$\Pr(A) = \sum_{i=1}^{m} \Pr(A \mid B_i) \cdot \Pr(B_i)$$



- Regra de Bayes

condicional

$$\Pr(B_k \mid A) = \frac{\Pr(B_k \cap A)}{\Pr(A)} = \frac{\Pr(A \mid B_k) \cdot \Pr(B_k)}{\sum_{i=1}^{m} \Pr(A \mid B_i) \cdot \Pr(B_i)}$$

$$\Pr(2) = \underbrace{\Pr(\{2\} \mid \text{par})}_{1/3} \cdot \underbrace{\Pr(\text{par})}_{1/2} + \underbrace{\Pr(2 \mid \text{ímpar})}_{0} \cdot \underbrace{\Pr(\text{ímpar})}_{1/2} = 1/6$$

$$1 = \Pr(\text{par} \mid 2) = \frac{\Pr(2 \cap \{2,4,6\})}{\Pr(2)} = 1$$

Variáveis aleatórias

- Uma variável aleatória é uma função $X : \Omega \to \mathbb{R}$

  Ex: Tempo de execução de um alg. randomizado
  Custo de um alg. randomizado

- Quando escrevemos $\Pr(X = x)$ nos referimos à prob. do evento

$$A_{X=x} = \{\omega \in \Omega : X(\omega) = x\}$$

  Ex: Jogar n moedas. X = número de caras

$$\Pr(X = k) = \binom{n}{k} / 2^n$$

- Função densidade de probabilidade de X

val

$$P_X(x) : \mathbb{R} \to [0,1] \quad \text{t.q.} \quad P_X(x) = \Pr(X = x)$$

var

- ESPERANÇA OU VALOR ESPERADO DE

MÉDIA PONDERADA PELA PROBABILIDADE

$$E(X) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \cdot P_R(\omega) = \sum_{x \in \mathbb{R}} x \cdot P_X(x)$$

$1/2^6$

$$\binom{6}{3} =$$

EX: LANÇAR SEIS MOEDAS

$$E(X) = 1 \cdot P_X(1) + \cdots + 6 \cdot P_X(6)$$, SABEMOS QUE $P_X(k) = \binom{6}{k} / 2^6$

$$= (6 + 30 + 60 + 60 + 30 + 6) / 2^6 = 3$$

0	1	2	3	4	5	6
1	6	15	20	15	6	1

- A ESPERANÇA É UMA FUNÇÃO LINEAR.

$$E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$$, EM QUE X, Y SÃO VAR. ALEAT. E $a, b \in \mathbb{R}$

EX: LANÇAR SEIS MOEDAS: $X = X_1 + \cdots + X_6$, EM QUE X_i É O RESULTADO DO i-ÉSIMO LANÇAMENTO

$$E(X) = \sum E(X_i) = 6 \cdot \frac{1}{2} = 3$$

LIMITES DE CAUDA

- ESPERANÇA É A MÉDIA

  → VALIOSO QUANDO REPETIMOS UM EXPERIMENTO VÁRIAS VEZES

  → NÃO NOS DÁ MUITA INFORMAÇÃO QUANTO A DENSIDADE DE PROB.

DESIGUALDADE DE MARKOV: SEJA X UMA VAR. AL. POSITIVA

$$\Pr(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a} \quad \text{SE} \quad a > 0$$

PROVA:

$$E(X) \overset{\text{DEF.}}{=} \sum_{x \in \mathbb{R}} x \cdot \Pr(X = x) \geq \sum_{x \geq a} x \cdot \Pr(X = x)$$

$X \geq a$

$$\geq \sum_{x \geq a} a \cdot \Pr(X = x)$$

$$\geq a \cdot \sum_{x \geq a} \Pr(X = x)$$

$$= a \cdot \Pr(X \geq a) \quad \blacksquare$$

- VARIÂNCIA DE X: valor esperado da distância de X para $E(X)$

$$\underline{Var(X)} = E\left((X-E(X))^2\right) = E(X^2) - E(X)^2$$

$$Y = |X - E(X)|$$
$$\underline{Y^2} = (X - E(X))^2$$

$$\| \quad E\left(X^2 - \underline{2XE(X)} + E(X)^2\right)$$

$$E(X^2) - \cancel{2}E(X)E(X) \cancel{+ E(X)^2}$$

→ Também usamos $\sigma = \sqrt{Var(X)}$

↳ Desvio Padrão

Desigualdade de Chebyshev

$$Pr(|X - E(X)| \geq a) \leq \frac{Var(X)}{a^2}, \text{ se } a > 0$$

<u>Prova</u>: $Pr(|X - E(X)| \geq a) = Pr(\underbrace{\overset{Y}{(X - E(X))}^2}\geq a^2)$

Markov

$$\leq \frac{E(\overset{Y}{(X-E(X))^2})}{a^2} \overset{\text{DEF. VAR}}{=} \frac{Var(X)}{a^2} = \frac{\sigma^2}{k^2\sigma^2}$$

Alternativamente, escrevendo $a = k \cdot \sigma$, temos

$$Pr(|X - E(X)| \geq k \cdot \sigma) \leq 1/k^2$$

VARIÁVEIS ALEATÓRIAS IMPORTANTES

- **BERNOULLI**: DADO $p \in [0,1]$, $X = \begin{cases} 1 & \text{COM PROB } p \\ 0 & \text{COM PROB } 1-p \end{cases}$

EX: VARIÁVEIS INDICADORAS

→ DENSIDADE DE PROBABILIDADE $\quad P_X(x) = \begin{cases} p & \text{SE } x = 1 \\ 1-p & \text{SE } x = 0 \\ 0 & \text{CASO CONTRÁRIO} \end{cases}$

EX: MOEDA VICIADA.

LEMA: $E(X) = 1 \cdot \Pr(X=1) + 0 \cdot \Pr(X=0) = p.$

- **BINOMIAL**

→ INDICA O NÚMERO DE SUCESSOS EM UMA SEQ. DE EXPERIMENTOS ALEATÓRIOS IDÊNTICOS E INDEPENDENTES

$$X = X_1 + \dots + X_n \quad \text{COM} \quad P_{X_1}(x) = \dots = P_{X_n}(x) \quad \forall x$$

EX: NÚMERO DE CARAS

→ DENSIDADE $\quad P_X(x) = \begin{cases} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, & 0 \leq x \leq n \text{ INTEIRO} \\ 0 & \text{CASO CONTRÁRIO} \end{cases}$

Variável Aleatória Geométrica

- Não estamos interessados no número de sucessos, mas sim no número de experimentos até o primeiro sucesso

Ex: Quantas vezes precisamos jogar a moeda até sair cara?

- A dens. de uma var. geométrica X com prob. de sucesso p é

$$P_X(x) = \begin{cases} p(1-p)^{x-1} & \text{para } x = 1, 2, \dots \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

- $E(X) = 1/p$

Prova: $E(X) = \sum_{x=1}^{\infty} x \cdot p(1-p)^{x-1} \Rightarrow (1-p)E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x \cdot p(1-p)^{x} = \sum_{i=2}^{\infty} (x-1) p (1-p)^{x-1}$

$$pE(X) = E(X) - (1-p)E(X) = p + \sum_{i=2}^{\infty} p(1-p)^{x-1} (x - (x-1))$$

$$= p + p \sum_{i=1}^{\infty} (1-p)^{x} = p - \cancel{p} \frac{(1-p)}{\cancel{p}} = 1 \quad \blacksquare$$

Análise Probabilística e Algoritmos Randomizados

- Problema da contratação:

  → Há uma lista de candidatos $C_1, \dots, C_n$

  → Contratamos C_1 automaticamente

  → Cada candidato possui uma nota $N_1, \dots, N_n$

  → Os candidatos chegam em ordem $C_1, \dots, C_n$

  → Se entrevistamos um candidato com nota maior do que a do que está contratado demitimos o atual e contratamos o entrevistado

  Há um custo c_h p/ cada contratação

Contratar$(N_1, \dots, N_n)$
```
1  N* ← N_1
2  Para i = 2, ..., n
3      Se N_i > N*
4          N* ← N_i     (custo c_h)
```

Tempo:

Custo:

Melhor caso:

Pior caso:

Quais são as probabilidades?

Análise Probabilística

- Em geral, avaliar o tempo de processamento
- Avaliar outras quantidades
  - Precisamos de mais informações (ou suposições) sobre a distribuição das instâncias
  - Usamos a média.

- Tempo de processamento do caso médio
  Custo do caso médio

- Assumir que os candidatos estão em uma ordem aleatória.
  - As notas são uma ordenação de $1, \dots, n$
  - Cada uma das $n!$ ordenações possui igual probabilidade

- Permutação aleatória uniforme

Variação do Modelo

- A agência envia uma lista de candidatos
- Não conhecemos as notas
- Nós escolhemos a ordem

Contratar (A)
1. Randomiza A
2. $N^* \leftarrow 0$
3. Para $i = 1, \dots, |A|$
4.   Se $N^* < N(A[i])$
5. $N^* = N(A[i])$

- Dizemos que um algoritmo é randomizado se seu comportamento depende da instância e de um gerador de números aleatórios.

- Assumimos que existe uma função Random(a,b) que devolve um número em [a,b] de forma uniforme
  - Cada valor com prob. $1/(b-a+1)$

- Pseudo aleatório

- DIZEMOS QUE UM ALGORITMO É RANDOMIZADO SE SEU COMPORTAMENTO DEPENDE DA INSTÂNCIA E DE UM GERADOR DE NÚMEROS ALEATÓRIOS.

- ASSUMIMOS QUE EXISTE UMA FUNÇÃO RANDOM(a,b) QUE DEVOLVE UM NÚMERO EM $[a,b]$ DE FORMA UNIFORME
  - CADA VALOR COM PROB. $1/(b-a+1)$

  - PSEUDO ALEATÓRIO

- O TEMPO DE PROCESSAMENTO ESPERADO É TOMADO SOBRE A DISTRIBUIÇÃO DO GERADOR DE NÚMEROS ALEATÓRIOS
  - DIFERENTE DE SUPOR QUE A ORDEM DE ENTRADA É ALEATÓRIA.

- ALGORITMOS RANDOMIZADOS "PAGAM" COM INCERTEZA, GANHAM COM SIMPLICIDADE

Variáveis aleatórias indicadoras

- Dado espaço S e evento $A \subseteq S$, a variável indicadora $I(A)$ é definida por

$$I(A) = \begin{cases} 1 & \text{se } A \text{ acontece} \\ 0 & \text{se } A \text{ não acontece} \end{cases}$$

Ex: $S = \{\overset{H}{\text{cara}}, \overset{T}{\text{coroa}}\}$, $Pr(H) = Pr(T) = 1/2$

→ $I(H)$ conta o número de caras ao jogar a moeda uma vez

→ O número de caras esperado é

$$E(I(H)) = 1 \cdot Pr(H) + 0 \cdot Pr(T) = 1/2$$

Lema: Dado espaço S e evento A, temos $E(I(A)) = Pr(A)$

Jogando n moedas iguais

→ X_i a variável indicadora de que a i-ésima moeda dá cara

→ X é o número de caras

$$X = X_1 + \cdots + X_n$$

$$\Rightarrow E(X) = E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{1/2}_{\text{Prob. cara}} = n/2$$

$$p \qquad = p \cdot n$$

Análise do Problema de Contratação

→ X_i : Var. indicadora de que C_i foi contratado

→ $X = X_1 + \cdots + X_n$ # candidatos contratados

Pelo lema, $E(X_i) = \sum Pr(C_i \text{ é contratado})$

→ C_i é contratado quando for melhor que os anteriores

AF: $Pr(C_i \text{ é contratado}) = 1/i$

Logo $E(X) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \sum_{i=1}^{n} Pr(C_i \text{ é contratado}) = \sum_{i=1}^{n} 1/i = \log n + O(1)$

↑ lin esp.

Contratamos em média $\log n$ candidatos

⇒ Custo médio $O(C_h \cdot \log n)$

AF: $Pr(C_i$ É CONTRATADO$) = 1/i$

PROVA: FIXE $S \subseteq \{1, \dots, n\}$ T.q. $|S| = i$ S FIXADO $\rightarrow$

P_S = CONJ. DAS PERMUT. EM QUE OS PRIMEIROS ELTS SÃO OS DE S.

OBS: $|P_S| = i!\,(n-i)!$ P_S FIXADO $\rightarrow$

$S = \{a_1, \dots, a_i\}$

HÁ $(i-1)!\,(n-i)!$ PERMUT. EM P_S EM QUE O i-ÉSIMO É MAIOR

OU SEJA $\frac{(i-1)!\,(n-i)!}{i!\,(n-i)!} = 1/i$ DAS PERMUTAÇÕES EM P_S CONTRATAM i

LOGO

$$Pr(C_i \text{ É CONTRATADO}) = \frac{\#\text{ PERMUTS. QUE } C_i \text{ É CONTRATADO}}{n!} = \frac{1}{n!} \sum_{|S|=i} \frac{1}{i} |P_S|$$

$$= \frac{1}{i} \cdot \frac{1}{n!} \sum_{|S|=i} |P_S| = \frac{1}{i} \cdot \frac{1}{n!} \cdot n! = \frac{1}{i}$$

$\blacksquare$

RECAPITULANDO

- O PRIMEIRO ALGORITMO ASSUMIA QUE A ORDEM DOS CANDIDATOS ERA ALEATÓRIA

CUSTO MÉDIO : $O(C_h \cdot \log n)$

→ UM ADVERSÁRIO PODERIA ESCOLHER UMA ORDEM RUIM $\big(O(n \cdot C_h)\big)$

- O SEGUNDO ALGORITMO REALIZA UM SORTEIO DA ORDEM

CUSTO ESPERADO : $O(C_h \cdot \log n)$

→ NENHUM ADVERSÁRIO PODE ATRAPALHAR.

- DIFERENÇA ENTRE ANÁLISE PROBABILÍSTICA E ALGORITMOS RANDOMIZADOS