

PROBABILIDADE

- **ESPAÇO AMOSTRAL** Ω : CONJUNTO DE TODOS OS POSSÍVEIS RESULTADOS DE UM EXPERIMENTO ALEATÓRIO

EX: FACES DE UM DADO $\Omega = \{1, \dots, 6\}$

- **EVENTO**: QUALQUER SUBCONJUNTO DE Ω

EX: FACES PARES $A = \{2, 4, 6\}$

- **EVENTO ELEMENTAR**: EVENTO DO TIPO $A = \{r\}$

EX: $A = \{3\}$

- **FUNÇÃO DE PROBABILIDADE**: FUNÇÃO $P_r: \Omega \rightarrow [0, 1]$ T.q. $\sum_{\omega \in \Omega} P_r(\omega) = 1$
→ ESTENDAMOS PARA SUBCONJUNTOS DE Ω : SE $A \subseteq \Omega$, ENTÃO $P_r(A) = \sum_{\omega \in A} P_r(\omega)$

1. PARA TODO $A \subseteq \Omega$, TEMOS $P_r(A) \in [0, 1]$

2. $P_r(\Omega) = 1$

3. SE $A_1, \dots, A_K$ SÃO EVENTOS DISJUNTOS, ENTÃO $P_r\left(\bigcup_{i=1}^K A_i\right) = \sum_{i=1}^K P_r(A_i)$

PRINCÍPIO DA INCLUSÃO E EXCLUSÃO

4. SE $A_1, \dots, A_k \subseteq \Omega$, ENTÃO

$$P_R(\cup A_i) = \sum P_R(A_i) - \sum_{i < j} P_R(A_i \cap A_j) + \sum_{i < j < k} P_R(A_i \cap A_j \cap A_k) - \dots$$

COTA DA UNIÃO

→ VERSÃO FRACA DO P.I.E.

5. SE $A_1, \dots, A_k \subseteq \Omega$, ENTÃO $P_R(\cup A_i) \leq \sum P_R(A_i)$

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$
$$|\cup A_i| = \sum |A_i| - \sum_{i < j} |A_i \cap A_j| + \sum_{i < j < k} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \dots$$

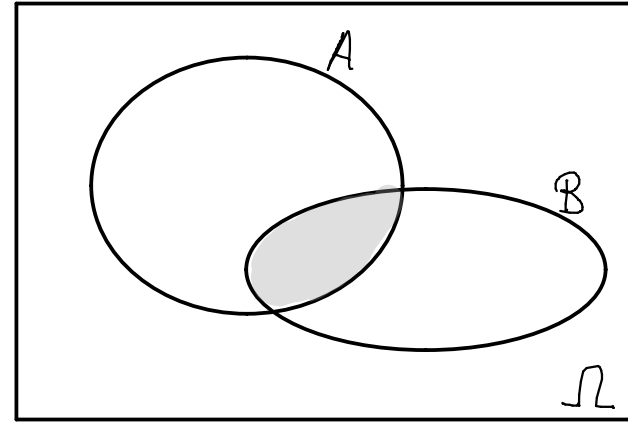
$$|\cup A_i| \leq \sum |A_i|$$

?

PROBABILIDADE CONDICIONAL

- A Prob. de Ocorrer um evento A, sabendo que ocorre um evento B

$$Pr(A | B) = \frac{Pr(A \cap B)}{Pr(B)}$$



EX: DADOS. ^{Honestos} Qual a probabilidade de sair 2 sabendo que saiu par?

$$Pr(2 | \text{Foi par}) = \frac{Pr(\{2\} \cap \{2, 4, 6\})}{Pr(\{2, 4, 6\})} = \frac{Pr(\{2\})}{Pr(\{2, 4, 6\})} = \frac{1/6}{1/2} = 1/3$$

- Se $Pr(A | B) = Pr(A)$, ou seja, $Pr(A \cap B) = Pr(A) \cdot Pr(B)$,

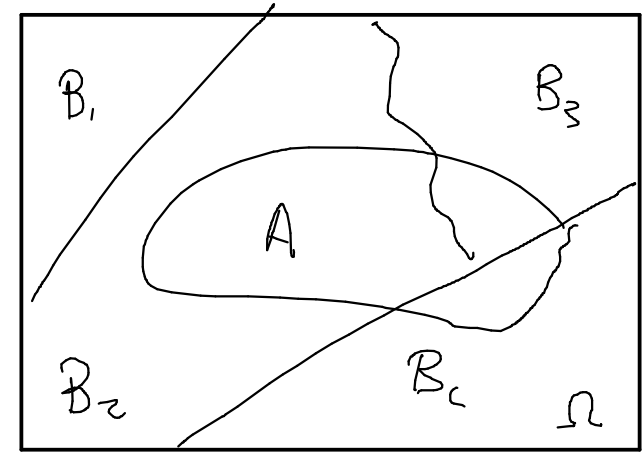
DIZEMOS QUE A E B SÃO EVENTOS INDEPENDENTES

PROBABILIDADE TOTAL

- SEJA $B_1, \dots, B_m$ UMA PARTIÇÃO DE Ω EM EVENTOS DISTINTOS.

A PROB. DE UM EVENTO $A \subseteq \Omega$

$$P_R(A) = \sum_{i=1}^m P_R(A | B_i) \cdot P_R(B_i)$$



- REGRA DE BAYES

$$P_R(B_k | A) = \frac{P_R(B_k \cap A)}{P_R(A)} = \frac{\overset{\text{CONDICIONAL}}{P_R(A | B_k) \cdot P_R(B_k)}}{\sum_{i=1}^m P_R(A | B_i) \cdot P_R(B_i)}$$

$$P_R(2) = \underbrace{P_R(2 \cap \{2, 4, 6\})}_{1/3} \cdot \underbrace{P_R(\{2, 4, 6\})}_{1/2} + \underbrace{P_R(2 \cap \{\text{impar}\})}_0 \cdot \underbrace{P_R(\{\text{impar}\})}_{1/2} = 1/6$$

$$1 = P_R(P_{\text{par}} | 2) = \frac{P_R(2 \cap \{2, 4, 6\})}{P_R(2)} = 1$$

VARIÁVEIS ALEATÓRIAS

- Uma **VARIÁVEL ALEATÓRIA** é uma função $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$

EX: TEMPO DE EXECUÇÃO DE UM ALG. RANDOMIZADO
CUSTO DE UM ALG. RANDOMIZADO

- Quando escrevemos $\Pr(X=x)$ nos referimos à prob. do evento

$$A_{X=x} = \left\{ \omega \in \Omega : X(\omega) = x \right\}$$

EX: JOGAR n MOEDAS. X = NÚMERO DE CORAS

$$\Pr(X=k) = \binom{n}{k} / 2^n$$

- **FUNÇÃO DENSIDADE DE PROBABILIDADE DE X**

$\overset{\text{val}}{\uparrow}$
 $P_X(x): \mathbb{R} \rightarrow [0,1]$ t.q. $P_X(x) = \Pr(X=x)$
 $\downarrow$
 VAR

- ESPERANÇA OU VALOR ESPERADO DE

$$E(X) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \cdot P_R(\omega) = \sum_{x \in \mathbb{R}} x \cdot P_X(x)$$

MÉDIA PONDERADA PELA
PROBABILIDADE

$$\frac{1}{2^6}$$

$$\binom{6}{3} =$$

EX: LANÇAR SEIS MOEDAS

$$E(X) = 1 \cdot P_X(1) + \dots + 6 \cdot P_X(6), \quad \text{SABEMOS QUE } P_X(k) = \binom{6}{k} / 2^6$$
$$= (6 + 30 + 60 + 60 + 30 + 6) / 2^6 = 3$$

0	1	2	3	4	5	6
1	6	15	20	15	6	1

- A ESPERANÇA É UMA FUNÇÃO LINEAR.

$$E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y), \quad \text{EM QUE } X, Y \text{ SÃO VAR. ALEAT. E } a, b \in \mathbb{R}$$

EX: LANÇAR SEIS MOEDAS : $X = X_1 + \dots + X_6$, EM QUE X_i É O RESULTADO DO i -ÉSIMO LANÇAMENTO

$$E(X) = \sum E(X_i) = 6 \cdot \frac{1}{2} = 3$$

LIMITES DE Cauda

- ESPERANÇA É A MÉDIA

→ VALIOSO QUANDO REPETIMOS UM EXPERIMENTO VÁRIAS VEZES

→ NÃO NOS DÁ MUITA INFORMAÇÃO QUANTO A DENSIDADE DE PROB.

DESIGUALDADE DE MARKOV: SEJA X UMA VAR. AL. POSITIVA

$$\text{EX: } a = 2E(X)$$

$$\Pr(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a} \quad \text{SE } a > 0$$

$$\Pr(X \geq 2E(X)) \leq \frac{E(X)}{2E(X)} = \frac{1}{2}$$

PROVA: $E(X) = \sum_{x \in \mathbb{R}} x \cdot \Pr(X=x) \geq \sum_{x \geq a} x \cdot \Pr(X=x)$

DEF. $x \geq a \Rightarrow$

$$\begin{aligned} &\geq \sum_{x \geq a} a \cdot \Pr(X=x) \\ &\geq a \cdot \sum_{x \geq a} \Pr(X=x) \\ &= a \cdot \Pr(X \geq a) \end{aligned}$$

$X \geq a$



- **VARIÂNCIA** DE X : VALOR ESPERADO DA DISTÂNCIA DE X PARA $E(X)$

$$\underline{\text{Var}(X)} = E\left((X - E(X))^2\right) = E(X^2) - E(X)^2$$

$$Y = |X - E(X)| \\ Y^2 = (X - E(X))^2$$

→ TAMBÉM USAMOS $\sigma = \sqrt{\text{Var}(X)}$ ↳ DESVIO PADRÃO

$$= E\left(X^2 - 2X E(X) + E(X)^2\right) \\ = E(X^2) - 2E(X)E(X) + E(X)^2$$

DESIGUALDADE DE CHEBYSHEV

$$\Pr(|X - E(X)| \geq a) \leq \frac{\text{Var}(X)}{a^2}, \text{ se } a > 0 \quad \Pr(X \leq E(X) - a) + \Pr(X \geq E(X) + a)$$

PROVA: $\Pr(|X - E(X)| \geq a) = \Pr\left(\left(X - E(X)\right)^2 \geq a^2\right)$ $a = k\sigma$

MARKOV $\rightarrow$

$$\leq \frac{E\left(\left(X - E(X)\right)^2\right)}{a^2} \stackrel{\text{DEF. VAR.}}{=} \frac{\text{Var}(X)}{a^2} = \frac{\sigma^2}{k^2 \sigma^2} = \frac{1}{k^2}$$

ALTERNATIVAMENTE, ESCRIVENDO $a = k \cdot \sigma$, TEMOS

$$\Pr(|X - E(X)| \geq k \cdot \sigma) \leq 1/k^2$$

$$\Pr(|Z - E(Z)| \geq 10 \cdot \sigma_Z) \leq \frac{1}{100}$$

VARIÁVEIS ALEATÓRIAS IMPORTANTES

- BERNOULLI: DADO $p, \in [0,1]$ $X = \begin{cases} 1 & \text{com prob } p \\ 0 & \text{com prob } 1-p \end{cases}$

EX: VARIÁVEIS INDICADORAS

→ DENSIDADE DE PROBABILIDADE $P_X(x) = \begin{cases} p & \text{se } x=1 \\ 1-p & \text{se } x=0 \\ 0 & \text{CASO CONTRÁRIO} \end{cases}$

EX: MOEDA VICIADA

LEMA: $E(X) = 1 \cdot P_r(X=1) + 0 \cdot P_r(X=0) = p$

- BINOMIAL

→ INDICA O NÚMERO DE SUCESSOS EM UMA SEQ. DE EXPERIMENTOS ALEATÓRIOS IDÊNTICOS E INDEPENDENTES

$$X = X_1 + \dots + X_m \quad \text{com} \quad P_{X_1}(x) = \dots = P_{X_m}(x) \quad \forall x$$

EX: NÚMERO DE CARAS

→ DENSIDADE $P_X(x) = \begin{cases} \binom{m}{x} p^x (1-p)^{m-x}, & 0 \leq x \leq m \text{ INTEIRO} \\ 0 & \text{CASO CONTRÁRIO} \end{cases}$

VARIÁVEL ALEATÓRIA GEOMÉTRICA

H
HEAD
p

T
TAIL
(1-p)

ESPAÇO DE PROBABILIDADE INFINITO

$$\Omega = \left\{ \underset{1}{H}, \underset{2}{TH}, \underset{3}{TTH}, \dots, \underset{(1-p)^{x-1} \cdot p}{T \dots T H}, \dots \right\}$$

→ NÃO ESTAMOS INTERESSADOS NO NÚMERO DE SUCESSOS,
MAS SIM NO NÚMERO DE EXPERIMENTOS ATÉ O PRIMEIRO SUCESSO

EX: QUANTAS VEZES PRECISAMOS JOGAR A MOEDA ATÉ SAIR CARA?

→ A DENS. DE UMA VAR. GEOMÉTRICA X COM PROB. DE SUCESSO $p \in (0, 1)$

$$P_X(x) = \begin{cases} p(1-p)^{x-1} & \text{PARA } x = 1, 2, \dots \\ 0 & \text{CASO CONTRÁRIO} \end{cases}$$

$$1 \cdot p(1-p) + 2 \cdot p(1-p)^2 + \dots$$

PROP: $E(X) = 1/p, \quad p > 0$

PROVA: $E(X) = \sum_{x=1}^{\infty} x \cdot p(1-p)^{x-1} \Rightarrow (1-p)E(X) = \sum_{x=1}^{\infty} x \cdot p(1-p)^x = \sum_{x=2}^{\infty} (x-1) p(1-p)^{x-1}$

$$pE(X) = E(X) - (1-p)E(X) = p + \sum_{x=2}^{\infty} p(1-p)^{x-1} (x - (x-1))$$

$$= p + p \sum_{i=1}^{\infty} (1-p)^i = p - p \frac{(1-p)}{p} = 1 \quad \square$$

ANÁLISE PROBABILÍSTICA E ALGORITMOS RANDOMIZADOS

• PROBLEMA DA CONTRATAÇÃO :

→ Há uma lista de candidatos $C_1, \dots, C_m$

→ Contratamos C_1 automaticamente

→ Cada candidato possui uma nota $N_1, \dots, N_m$

→ Os candidatos chegam em ordem $C_1, \dots, C_m$

→ Se entrevistamos um candidato com nota maior do que a do que está contratado demitimos o atual e contratamos o entrevistado

} Há um custo C_h
p/ cada contratação

Contratar $(N_1, \dots, N_m)$

- 1 $N^* \leftarrow N_1$
- 2 Para $i = 2, \dots, m$
- 3 se $N_i > N^*$
- 4 $N^* \leftarrow N_i$ (custo C_h)

Tempo : $\Theta(m)$

Custo : ?

Melhor caso : C_h

Pior caso : $m \cdot C_h$

} $\frac{(m+1)C_h}{2}$ X

Quais são as probabilidades?

Análise Probabilística

→ Em geral, avaliar o tempo de processamento

→ Avaliar outras quantidades

↳ Precisamos de mais informações (ou suposições)
sobre a distribuição das instâncias

→ Usamos a média.

→ Tempo de processamento do caso médio
Custo do caso médio

→ Assumir que os candidatos estão em uma ordem aleatória.

→ As notas são uma ordenação de $1, \dots, n$

→ Cada uma das $n!$ ordenações possui igual probabilidade

→ Permutação aleatória uniforme

VARIACÃO DO MODELO

- A AGÊNCIA ENVIA UMA LISTA DE CANDIDATOS
- NÃO CONHECEMOS AS NOTAS
- NÓS ESCOLHEMOS A ORDEM

CONTRATAR (A)

1. RANDOMIZE A

2. $N^* \leftarrow 0$

3. PARA $i = 1, \dots, |A|$

4. SE $N^* < N(A[i])$

5. $N^* = N(A[i])$

- DIZEMOS QUE UM ALGORITMO É **RANDOMIZADO** SE SEU COMPORTAMENTO DEPENDE DA INSTÂNCIA E DE UM GERADOR DE NÚMEROS ALEATÓRIOS.

- ASSUMIMOS QUE EXISTE UMA FUNÇÃO $RANDOM(a, b)$ QUE DEVOLVE UM NÚMERO EM $[a, b]$ DE FORMA UNIFORME

↳ CADA VALOR COM PROB. $1/(b-a+1)$

- PSEUDO ALEATÓRIO

→ DIZEMOS QUE UM ALGORITMO É **RANDOMIZADO** SE SEU COMPORTAMENTO DEPENDE DA INSTÂNCIA E DE UM GERADOR DE NÚMEROS ALEATÓRIOS.

→ ASSUMIMOS QUE EXISTE UMA FUNÇÃO $\text{RANDOM}(a, b)$ QUE DEVOLVE UM NÚMERO EM $[a, b]$ DE FORMA UNIFORME

↳ CADA VALOR COM PROB. $1/(b-a+1)$

→ PSEUDO ALEATÓRIO

→ O **TEMPO DE PROCESSAMENTO ESPERADO** É TOMADO SOBRE A DISTRIBUIÇÃO DO GERADOR DE NÚMEROS ALEATÓRIOS

→ DIFERENTE DE SUPOR QUE A ORDEM DE ENTRADA É ALEATÓRIA.

→ ALGORITMOS RANDOMIZADOS "PRGAM" COM INCERTEZA, GANHAM COM SIMPLICIDADE

VARIÁVEIS ALEATÓRIAS INDICADORAS

- DADO ESPAÇO S E EVENTO $A \in S$, A VARIÁVEL INDICADORA $I(A)$ É DEFINIDA POR

$$I(A) = \begin{cases} 1 & \text{SE } A \text{ ACONTECE} \\ 0 & \text{SE } A \text{ NÃO ACONTECE} \end{cases}$$

EX: $S = \left\{ \overset{H}{\text{CARA}}, \overset{T}{\text{COROA}} \right\}$, $\Pr(H) = \Pr(T) = 1/2$

→ $I(H)$ CONTA O NÚMERO DE CARAS AO JOGAR A MOEDA UMA VEZ

→ O NÚMERO DE CARAS ESPERADO É

$$E(I(H)) = 1 \cdot \Pr(H) + 0 \cdot \Pr(T) = 1/2$$

LEMA: DADO ESPAÇO S E EVENTO A , TEMOS $E(I(A)) = \Pr(A)$

↳ Bernoulli

JOGANDO n MOEDAS IGUAIS

→ X_i A VARIÁVEL INDICADORA DE QUE A i -ÉSIMA MOEDA DÁ CARA

→ X É O NÚMERO DE CARAS

$$X = X_1 + \dots + X_n$$

$$\Rightarrow E(X) = E\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n E(X_i) = \sum_{i=1}^n \underbrace{\frac{1}{2}}_{\substack{\text{Prob.} \\ \text{CARA}}} = n/2$$

$p = p \cdot n$

ANÁLISE DO PROBLEMA DE CONTRATAÇÃO

→ X_i : VAR. INDICADORA DE QUE C_i FOI CONTRATADO

→ $X = X_1 + \dots + X_m$ # CANDIDATOS CONTRATADOS

PELO LEMA, $E(X_i) = \sum \Pr(C_i \text{ É CONTRATADO})$

→ C_i É CONTRATADO QUANDO FOR MELHOR QUE OS ANTERIORES

AF: $\Pr(C_i \text{ É CONTRATADO}) = 1/i$

$$\text{LOGO } E(X) = \sum_{i=1}^m E(X_i) = \sum_{i=1}^m \Pr(C_i \text{ É CONTRATADO}) = \sum_{i=1}^m \frac{1}{i} = \log n + O(1)$$

↑
LIN ESP.

CONTRATAMOS EM MÉDIA $\log n$ CANDIDATOS

⇒ CUSTO MÉDIO $O(c_h \cdot \log n)$

$$\hookrightarrow \frac{(n+1)}{2} c_h = \Omega(n)$$



AF: $\Pr(C_i \text{ é CONTRATADO}) = 1/i$ X_i

PROVA: Fixe $S \subseteq \{1, \dots, n\} = [n]$ t.q. $|S| = i$

P_S = CONJ. DAS PERMUT. EM QUE OS PRIMEIROS i TS SÃO OS DE S

S FIXADO $\rightarrow$

OBS: $|P_S| = i! (n-i)!$ P_S FIXADO

$S = \{a_1, \dots, a_i\}$

Há $\frac{(i-1)! (n-i)!}{i! (n-i)!}$ PERMUT. EM P_S EM QUE O i -ÉSIMO É MAIOR

OU SEJA $\frac{(i-1)! (n-i)!}{i! (n-i)!} = 1/i$ DAS PERMUTAÇÕES EM P_S CONTRATAM i

Logo

$$\Pr(C_i \text{ é CONTRATADO}) = \frac{\# \text{ PERMUTS. QUE } C_i \text{ É CONTRATADO}}{n!} = \frac{1}{n!} \sum_{|S|=i} \frac{1}{i} |P_S|$$

$n = 4 \quad S \subseteq \{1, 2, 3, 4\}$
 $S = \{1, 4\} \quad i = 2 = |S|$

$$= \frac{1}{i} \cdot \frac{1}{n!} \sum_{|S|=i} |P_S| = \frac{1}{i} \cdot \frac{1}{n!} \cdot n! = \frac{1}{i}$$

$P_S = \{ \underline{4}23, \underline{4}32, 4\underline{1}23, 4\underline{1}32 \}$

TODA PERMUTAÇÃO ESTÁ EM EXATAMENTE UM P_S

$$i = 2$$

$$S_1 = 1 \ 2$$

1 2 3 4

1 2 4 3

2 1 3 4

2 1 4 3

$$S_4 = 2 \ 3$$

2 3 1 4

2 3 4 1

3 2 1 4

3 2 4 1

$$S_2 = 1 \ 3$$

1 3 2 4

1 3 4 2

3 1 2 4

3 1 4 2

$$S_5 = 2 \ 4$$

2 4 1 3

2 4 3 1

4 2 1 3

4 2 3 1

$$S_3 = 1 \ 4$$

1 4 2 3

1 4 3 2

4 1 2 3

4 1 3 2

$$S_6 = 3 \ 4$$

3 4 1 2

3 4 2 1

4 3 1 2

4 3 2 1

RECAPITULANDO

- O PRIMEIRO ALGORITMO ASSUMIA QUE A ORDEM DOS CANDIDATOS ERA ALEATÓRIA

$$\text{CUSTO MÉDIO : } O(C_n \cdot \log n)$$

→ UM ADVERSÁRIO PODERIA ESCOLHER UMA ORDEM RUIM ($O(n \cdot C_n)$)

- O SEGUNDO ALGORITMO REALIZA UM SORTEIO DA ORDEM

$$\text{CUSTO ESPERADO : } O(C_n \cdot \log n)$$

→ NENHUM ADVERSÁRIO PODE ATRAPALHAR.

- DIFERENÇA ENTRE ANÁLISE PROBABILÍSTICA E ALGORITMOS RANDOMIZADOS

