Matemática Concreta

Lista de exercícios 1

Data de entrega: 09/04/2021

Questão 1: Considere a seguinte proposição e sua demonstração.

> **Proposição 1.** *Todos os cavalos têm a mesma cor.*
>
> *Demonstração.* A demonstração segue por indução no número n de cavalos.
>
> **Caso base:** Se $n = 1$, então ele tem a mesma cor que ele mesmo, e todos os cavalos têm a mesma cor.
>
> **Hipótese de indução:** Se $n' < n$, então em qualquer conjunto com n' de cavalos, todos os cavalos têm a mesma cor.
>
> **Passo indutivo:** Seja S um conjunto com $n > 1$ cavalos, digamos $S = \{1, \ldots, n\}$. Note que $S_1 = S \setminus \{1\}$ e $S_2 = S \setminus \{n\}$ são dois conjuntos com $n-1$ cavalos. Como $n - 1 < n$, pela hipótese de indução, todos os cavalos em S_1 têm a mesma cor, e todos os cavalos em S_2 têm a mesma cor. Seja z um cavalo em $S_1 \cap S_2$, temos que 1 e n têm a mesma cor de z e, portanto, 1 tem a mesma cor de n, como gostaríamos de demonstrar. $\square$

Pergunta: Está prova está correta? Se não, onde está o erro?

Questão 2: Considere o problema de dividir o plano em regiões. Algumas dessas regiões são limitadas, e outras são ilimitadas. Qual é o maior número possível de regiões limitadas.

Questão 3: Resolva a recorrência Q dada por $Q(0) = \alpha$, $Q(1) = \beta$, e $Q(n) = \frac{(1+Q(n-1))}{Q(n-2)}$, para $n > 1$.

Questão 4: Considere a proposição $P(n)$ seguinte

$$P(n): \qquad \text{Se } x_1, \ldots, x_n \geq 0, \text{ então } x_1 \cdots x_n \leq \left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \right)^n$$

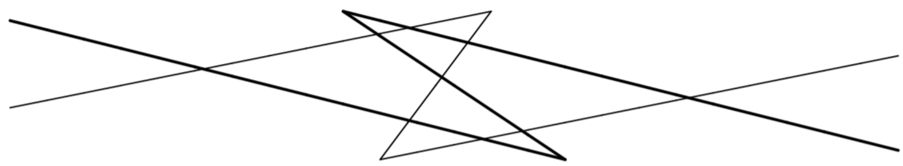
Note que $P(2)$ vale porque $(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = (x_1 - x_2)^2 \geq 0$.

a) Mostre que para $n > 1$, se $P(n)$ vale, então $P(n-1)$ vale. (Dica: defina $x_n = \frac{x_1 + \cdots + x_{n-1}}{n-1}$.)

b) Mostre que se $P(2)$ e $P(n)$ valem, então $P(2n)$ vale.

c) Explique porque isso implica que $P(n)$ vale para todo n.

Questão 5: Qual o número máxio de regiões definidas por n linhas em zig-zag?



$ZZ_2 = 12$

Cada uma delas consiste em 2 semi-retas paralelas unidas por um segmento de reta. Observação: Semi-retas são infinitas.