

Matemática Concreta

Lista de exercícios 2

monitores: brunoln@cos.ufrj.br, {storino, lemos25matheus}@poli.ufrj.br

Data de entrega: 30/04/2021

Questão 1: Qual o valor de $S_{j,n} = \sum_k [1 \leq j \leq k \leq n]$?

Questão 2: Mostre que dado inteiro c , a função $p(k) = k + c \cdot (-1)^k$ é uma permutação do conjunto de todos inteiros, i.e., $p(k)$ é bijetiva.

Questão 3: Encontre uma fórmula fechada para $\sum_{k=0}^n (-1)^k k^2$ usando o método da compilação (Repertório).

Questão 4: Calcule a soma $\sum_{k=1}^n k 2^k$.

Dica: Note que $k = \sum_{j=1}^k 1$.

Questão 5: Mostre que $x^{\overline{m}} = 1/(x-1)^{-m}$ e $x^{\underline{m}} = 1/(x+1)^{-m}$. Quais resultados sobre potências fatoriais decrescentes podemos estender para potências fatoriais crescentes?

Questão 6: Use um fator somante para resolver a seguinte relação de recorrência.

$$\begin{aligned} T_0 &= 5; \\ 2T_n &= nT_{n-1} + 3 \cdot n! \quad \text{para } n > 0 \end{aligned}$$

Questão 7: Calcule a soma $\sum_{k=1}^n \frac{2k+1}{k(k+1)}$ das seguintes maneiras:

- (i) Troque $\frac{1}{k(k+1)}$ pelas frações $\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$.
- (ii) Some por partes.

Questão 8: A função *zeta de Riemann* ζ é definida por $\zeta(k) = \sum_{j \geq 1} \frac{1}{j^k}$. Mostre que $\sum_{k \geq 2} (\zeta(k) - 1) = 1$. Qual o valor de $\sum_{k \geq 1} (\zeta(2k) - 1)$?