

Matemática Concreta

Lista de exercícios 3

monitores: brunoln@cos.ufrj.br, {storino, lemos25matheus}@poli.ufrj.br

Data de entrega: 21/05/2021

Questão 1: Ache uma condição necessária e suficiente, em termos de $\{x\}$, para que $\lfloor nx \rfloor = n\lfloor x \rfloor$ quando n é inteiro.

Questão 2: Resolva a relação de recorrência $X_n = n$ se $0 \leq n < m$ e $X_n = X_{n-m} + 1$ se $n \geq m$, onde $m > 0$ é um inteiro fixado.

Questão 3: Mostre que a expressão

$$\left\lfloor \frac{2x+1}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{2x+1}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2x+1}{4} \right\rfloor$$

é sempre igual a $\lfloor x \rfloor$ ou $\lceil x \rceil$. Caracterize cada caso.

Questão 4: Demonstre a seguinte igualdade

$$\left\lfloor \frac{n}{m} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n+m-1}{m} \right\rfloor$$

Questão 5: Prove ou dê um contra exemplo para a seguinte igualdade $(x \bmod ny) \bmod y = x \bmod y$, com n inteiro.

Questão 6: Prove que $n \bmod 2 = (1 - (-1)^n)/2$. Encontre uma expressão semelhante para $n \bmod 3$ na forma $a + bw^n + cw^{2n}$, onde w é o número complexo $(-1 + i\sqrt{3})/2$ (e temos $i^2 = -1$). Note (e use) as seguintes igualdades: $w^3 = 1$ e $1 + w + w^2 = 0$.

Questão 7: Calcule a soma de todos os múltiplos de x no intervalo fechado $[\alpha.. \beta]$ quando $x > 0$.

Questão 8: Prove que $Spec(\alpha)$ e $Spec(\beta)$ formam uma partição dos inteiros positivos se e somente se $\beta = \alpha/(\alpha - 1)$. Qual a relação entre $Spec(\alpha)$ e $Spec(\alpha/(\alpha + 1))$?

Questão 9: Prove ou dê um contraexemplo $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + \lfloor x + y \rfloor \leq \lfloor 2x \rfloor + \lfloor 2y \rfloor$.