

Matemática Concreta

Lista de exercícios 4

monitores: brunoln@cos.ufrj.br, {storino, lemos25matheus}@poli.ufrj.br

Data de entrega: 14/06/2021

Questão 1: Seja $\pi(x)$ o número de primos menores ou iguais a x . Prove ou dê um contraexemplo:

$$\pi(x) - \pi(x - 1) = [x \text{ é primo}]$$

Questão 2: Mostre que $(3^{77} - 1)/2$ é um número composto e ímpar. Sugestão: O que é $3^{77} \pmod{4}$

Questão 3: Prove que se $2^n + 1$ for primo, então n é uma potência de 2.

Questão 4: Calcule 11^4 usando Teorema Binomial.

Questão 5: Seja p primo. Mostre que $\binom{p}{k} \pmod{p} = 0$ para $0 < k < p$. O que podemos concluir sobre $\binom{p-1}{k}$?

Questão 6: Ache formas fechadas para a função geradora da sequência

$$\langle 2, 5, 13, 35, \dots \rangle = \langle 2^n + 3^n \rangle.$$

Questão 7: Suponha que um baralho de 52 cartas foi misturado aleatoriamente, i.e., cada um dos possíveis arranjos tem probabilidade $1/52!$. Qual a probabilidade da primeira e da última carta serem às ao mesmo tempo?

Questão 8: Mostra que se dois dados são viciados com a mesma distribuição de probabilidade, então a probabilidade de se obter duplas é sempre pelo menos igual a $1/6$.

Questão 9: Sejam $F(z)$ e $G(z)$ funções geradoras de probabilidade e seja $H(z) = pF(z) + qG(z)$, onde $p + q = 1$. Ache a média e a variância de H em termos de p , q , e das médias e variâncias de F e de G .