

COEFICIENTES BINOMIAIS

$\{1, \dots, r\}$

$\binom{r}{k}$ = NÚMERO DE SUBCONJUNTOS DE TAMANHO k EM $[r]$

→ ÍNDICE SUPERIOR

→ ÍNDICE INFERIOR.

$r!$ = NÚMERO DE ORDENAÇÕES DE $[r]$

$$r^{\underline{k}} = \frac{r!}{(r-k)!} = r(r-1)(r-2) \dots (r-k+1)$$

= NÚMERO DE SEQS COM k ETS EM $[r]$

É ÚTIL QUE $\binom{r}{k}$ SEJA DEFINIDO $\forall r \in \mathbb{R}$

$$\binom{r}{k} = \begin{cases} \frac{r^{\underline{k}}}{k!} & \text{SE } k \geq 0 \text{ INTEIRO} \\ 0 & \text{SE } k < 0 \end{cases}$$

→ É um POLINÔMIO DE GRAU k EM r
 $a_k r^k + a_{k-1} r^{k-1} + \dots + a_0$

TRIÂNGULO DE PASCAL

n	$\binom{n}{0}$	$\binom{n}{1}$	$\binom{n}{2}$	$\binom{n}{3}$	$\binom{n}{4}$	$\binom{n}{5}$
0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	6	4	1	
5	1	5	10	10	5	1

OBS: $\binom{r}{0} = 1$ e $\binom{r}{1} = r$ $\binom{r}{2} = \frac{r(r-1)}{2}$

SIMETRIA

~> AS LINHAS SÃO SIMÉTRICAS

$$\binom{r}{k} = \binom{r}{r-k} \rightarrow \text{EXCLUIR } k \text{ ÍTEMS}$$

↳ ESCOLHER k ÍTEMS

~> VALE QUANDO r É INTEIRO

ABSORÇÃO

$$\binom{r}{k} = \frac{r}{k} \binom{r-1}{k-1} \quad \text{SE } k \neq 0$$

$$\stackrel{\parallel k}{\frac{r}{k!}} = \frac{r}{k} \cdot \frac{\binom{r-1}{k-1}}{(k-1)!} = \frac{r}{k} \binom{r-1}{k-1}$$

$$\text{ALTERNATIVA: } k \binom{r}{k} = r \binom{r-1}{k-1}$$

$$\binom{r}{k} = \binom{r}{r-k}$$

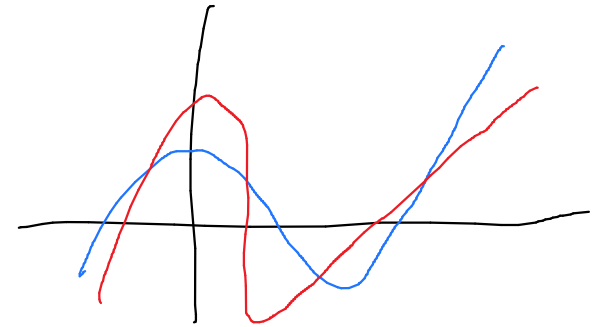
$$k \binom{r}{k} = r \binom{r-1}{k-1}$$

PROP: $(r-k) \binom{r}{k} = r \binom{r-1}{k}$ PARA r INTEIRO.

$$\text{SIM: } \binom{r}{k} = \binom{r}{r-k}$$

$$\text{ABS: } k \binom{r}{k} = r \binom{r-1}{k-1}$$

PROVA: $(r-k) \binom{r}{k} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{SIMETRIA}}}{=} (r-k) \binom{r}{r-k} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{ABSORÇÃO}}}{=} r \binom{r-1}{r-1-k} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{SIMETRIA}}}{=} r \binom{r-1}{k}$



OBS: VALE PARA TODO NÚMERO REAL

ARGUMENTO POLINOMIAL:

NOTE QUE $(r-k) \binom{r}{k}$ E $r \binom{r-1}{k}$ SÃO DOIS POLINÔMIOS

DE GRAU $k+1$. LOGO $P(r) = \underbrace{(r-k) \binom{r}{k}}_{P_1(r)} - \underbrace{r \binom{r-1}{k}}_{P_2(r)}$

É UM POLINÔMIO DE GRAU $k+1$

→ PORTANTO $P(r)$ POSSUI NO MÁXIMO $k+1$ RAÍZES OU $P(r) = 0$

MAS NOTE QUE TODO INTEIRO É RAÍZ DE $P(r)$. LOGO, $P(r) = 0$

Fórmula da Adição

$$\binom{r}{k} = \binom{r-1}{k} + \binom{r-1}{k-1}$$

* Com o ovo
K INTEIRO

↳ ARGUMENTO DO OVO PODE
↳ SEM O OVO

OBS:

$$\begin{aligned} \binom{r}{k} &= \binom{r-1}{k} + \binom{r-1}{k-1} \\ &= \binom{r-1}{k} + \binom{r-2}{k-1} + \binom{r-2}{k-2} \\ &= \binom{r-1}{k} + \binom{r-2}{k-1} + \binom{r-3}{k-2} + \binom{r-3}{k-3} \end{aligned}$$

COEF. DE
MENOR ÍNDICE
INF

$$\binom{r}{k} = \sum_{i=0}^k \binom{r-1-i}{k-i}$$

DIR → ESQ

$$= \sum_{i=0}^k \binom{r-1-k+i}{i}$$

ESQ → DIR

$r-1-k = A$

$$\binom{A+k+1}{k} = \sum_{i=0}^k \binom{A+i}{i}$$

$$\binom{r+1+k}{k} = \sum_{i=0}^k \binom{r+i}{i}$$

$$\sum_{k \leq n} \binom{r+k}{k} = \binom{r+n+1}{n}$$

n INTEIRO

SE EXPANDIRMOS O COEF DE MAIOR ÍNDICE INF.

$$\sum_{0 \leq k \leq n} \binom{k}{m} = \binom{n+1}{m+1}$$

(REGRAS DA COLUNA?)

COEFICIENTE BINOMIAL RECEBE ESTE NOME POR CAUSA DO TEO BINOMIAL

$$(x+y)^0 = 1x^0y^0$$

$$(x+y)^1 = 1x^1y^0 + 1x^0y^1$$

$$(x+y)^2 = 1x^2y^0 + 2x^1y^1 + 1x^0y^2$$

$$(x+y)^m = \underbrace{(x+y) \cdots (x+y)}_{m \text{ vezes}}$$

$$x^a y^b \quad a+b=m$$

O COEFICIENTE DE $x^j y^{m-j}$ É O NÚMERO DE FORMAS DE ESCOLHER j FATORES $= \binom{m}{j}$.

TEOREMA BINOMIAL : $(x+y)^r = \sum_k \binom{r}{k} x^k y^{r-k}$ r INTEIRO $r \geq 0$

COROLÁRIO : $2^r = \sum_k \binom{r}{k}$ TOMANDO $x=y=1$ (REGRAS DA LINHA)

$0^r = \sum_k \binom{r}{k} (-1)^k$ TOMANDO $x=-1, y=1$

PODEMOS ESCREVER

$$\binom{r}{k} = \frac{r!}{\underbrace{k!}_{a} \underbrace{(r-k)!}_{b}} \quad \text{como} \quad \frac{(a+b)!}{a! b!} \quad \text{ONDE} \quad a=k \quad \text{e} \quad b=r-k$$

SIMETRIA

$$\binom{n=a+b+c}{a} = \binom{n=a+b+c}{b+c}$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{\underline{k, n-k}}$$

ANALOGAMENTE, PODEMOS ESCREVER

$$\frac{(a+b+c)!}{a! b! c!} = \frac{r!}{\underbrace{k!}_{a} \underbrace{(m-k)!}_{b} \underbrace{(r-m)!}_{c}}$$

TEOREMA TRINOMIAL

$$(x+y+z)^n = \sum_{\substack{0 \leq a, b, c \leq n \\ a+b+c=n}} \frac{(a+b+c)!}{a! b! c!} x^a y^b z^c = \sum_{\substack{0 \leq a, b, c \leq n \\ a+b+c=n}} \binom{a+b+c}{b+c} \binom{b+c}{c} x^a y^b z^c$$

$$\frac{(a+b+c)!}{\cancel{(b+c)!} a!} \cdot \frac{\cancel{(b+c)!}}{b! c!}$$

TRINÔMIO:

$$\binom{a+b+c}{a, b, c} = \frac{(a+b+c)!}{a! b! c!}$$

GENERALIZANDO:

$$\binom{a_1 + a_2 + \dots + a_m}{a_1, a_2, \dots, a_m} = \frac{(a_1 + \dots + a_m)!}{a_1! \dots a_m!}$$

$$t = m + n$$

CONVOLUÇÃO DE VANDERMONDE

$$\binom{r+s}{m+n} = \sum_k \binom{r}{m+k} \binom{s}{n-k} = \sum_{\substack{a+b=t}} \binom{r}{a} \binom{s}{b}$$

↳ DE QUANTAS FORMAS
EU POSSO ESCOLHER $m+n$
PESSOAS EM UM UNIVERSO
DE r HOMENS E s MULHERES?

$$\binom{r+s}{t} = \sum_{a=0}^t \binom{r}{a} \binom{s}{t-a}$$

TRUQUE

$$\begin{aligned}
 r^{\frac{k}{2}} \left(r - \frac{1}{2}\right)^{\frac{k}{2}} &= r \cdot \left(r - \frac{1}{2}\right) \cdot (r-1) \cdot \left(r - \frac{3}{2}\right) \cdot (r-2) \cdot \dots \cdot (r-k+1) \cdot \left(r - k + 1 - \frac{1}{2}\right) \\
 &= \frac{1}{2^{2k}} (2r) (2r-1) (2r-2) (2r-3) (2r-4) \dots (2r-2k+2) (2r-2k+1) \\
 &= \frac{1}{2^{2k}} \cdot (2r)^{\frac{2k}{2}}
 \end{aligned}$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n^{\frac{k}{2}}}{k!}$$

$$n^{\frac{k}{2}} = \binom{n}{k} k!$$

DIVIDINDO POR $(k!)^2$

$$\frac{r^{\frac{k}{2}} \left(r - \frac{1}{2}\right)^{\frac{k}{2}}}{k! \cdot k!} = \frac{(2r)^{\frac{2k}{2}}}{2^{2k} (k!)^2} = \frac{1}{2^{2k}} \frac{(2r)^{\frac{2k}{2}}}{(2k)!} \frac{(2k)!}{(k!)^2} = \frac{1}{2^{2k}} \binom{2r}{2k} \binom{2k}{k}$$

$$\binom{r}{k} \binom{r - \frac{1}{2}}{k}$$

$$\binom{r}{k} \binom{r - \frac{1}{2}}{k} = \frac{1}{2^{2k}} \binom{2r}{2k} \binom{2k}{k}$$

$$\binom{r}{k} \binom{r-\frac{1}{2}}{k} = \frac{1}{2^{2k}} \binom{2r}{2k} \binom{2k}{k}$$

$$\binom{m-\frac{1}{2}}{n} = \frac{(m-\frac{1}{2})^{\underline{m}}}{m!} = (-1)^m \frac{(-\frac{1}{2})^{\underline{m}}}{m!}$$

Tomando $k=r=n$

$$\binom{n}{n} \binom{n-\frac{1}{2}}{n} = \frac{1}{2^{2n}} \cdot \binom{2n}{2n} \binom{2n}{n}$$

$$= (-1)^m \binom{-\frac{1}{2}}{n}$$

Logo, $\binom{m-\frac{1}{2}}{n} = \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n}$

OBS: $(m-\frac{1}{2})^{\underline{m}} = (m-\frac{1}{2})(m-\frac{3}{2}) \cdots (\frac{1}{2}) = \frac{1}{2^m} (2m-1)(2m-3) \cdots 1$

$$= \frac{(-1)^m}{2^m} (-2m+1)(-2m+3) \cdots (-3)(-1)$$

$$= (-1)^m \left(-m+\frac{1}{2}\right) \left(-m+\frac{3}{2}\right) \cdots \underbrace{\left(-\frac{3}{2}\right)}_{-1} \underbrace{\left(-\frac{1}{2}\right)}_{-1}$$

$$= (-1)^m \left(-\frac{1}{2}\right)^{\underline{m}}$$

$$\text{ex: } \binom{4-\frac{1}{2}}{4} = \frac{(4-\frac{1}{2})(3-\frac{1}{2})(2-\frac{1}{2})(\frac{1}{2})}{4!} = \frac{\frac{7}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2}}{4!} = \binom{-\frac{1}{2}}{4}$$

$$a) \binom{n-\frac{1}{2}}{n} = \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n} = (-1)^n \binom{-\frac{1}{2}}{n}$$

$$b) \binom{n-\frac{1}{2}}{n} = (-1)^n \binom{-\frac{1}{2}}{n}$$

$$\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \left(\begin{array}{c} 2n \\ (-1) \end{array} \right) \binom{-\frac{1}{2}}{n} = \frac{(-1)^n}{2^{2n}} \binom{2n}{n}$$

$$= \left(-\frac{1}{4} \right)^n \binom{2n}{n}$$

$$2^{2n} = 4^n$$

$$\text{ex: } \binom{4 - \frac{1}{2}}{4} = \frac{(4 - \frac{1}{2})(3 - \frac{1}{2})(2 - \frac{1}{2})(\frac{1}{2})}{4!} = \frac{\left(\frac{7}{2}\right)\left(\frac{5}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)}{4!} = \left(-\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{4!}$$

$$= \left(-\frac{1}{2}\right)^4 \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot \frac{\frac{2}{2} \cdot \frac{4}{2} \cdot \frac{6}{2} \cdot \frac{8}{2}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = \underbrace{\left(-\frac{1}{2}\right)^4 \left(\frac{1}{2}\right)^4}_{\left(-\frac{1}{4}\right)^4} \cdot \frac{8!}{4! \cdot 4!}$$

$$= \left(-\frac{1}{4}\right)^4 \cdot \binom{8}{4}$$

LEMBRANDO : $\Delta f(x) = f(x+1) - f(x)$

APLICANDO NOVAMENTE

$$\begin{aligned}\Delta^2 f(x) &= \Delta (f(x+1) - f(x)) \\ &= f(x+2) - f(x+1) - f(x+1) + f(x) \\ &= f(x+2) - 2f(x+1) + f(x)\end{aligned}$$

CONTINUANDO :

$$\begin{aligned}\Delta^3 f(x) &= f(x+3) - 2f(x+2) + f(x+1) - (f(x+2) - 2f(x+1) + f(x)) \\ &= f(x+3) - 3f(x+2) + 3f(x+1) - f(x)\end{aligned}$$

$$\Delta^3 f(x) = f(x+3) - 3f(x+2) + 3f(x+1) - f(x)$$

$$\Delta^4 f(x) = f(x+4) - 4f(x+3) + 6f(x+2) - 4f(x+1) + f(x)$$

o CASO GERAL FICA

$$\Delta^n f(x) = \sum_k \binom{n}{k} (-1)^{n-k} f(x+k) = \sum_k \binom{n}{k} (-1)^{n-k} E^k f(x)$$

$$\Delta^n = (E-1)^n = \sum_k \binom{n}{k} (-1)^{n-k} E^k$$

LEMBRE-SE: $E f(x) = f(x+1)$.

PODEMOS PENSAR

$$\Delta f(x) = f(x+1) - f(x) = E f(x) - f(x)$$

$$\Delta = E - 1$$

FUNÇÕES GERADORAS

- GOSTARÍAMOS DE REPRESENTAR A SÉRIE INFINITA $(a_0, a_1, \dots)$ POR UMA SÉRIE DE POTÊNCIAS.

$$A(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots = \sum_{k \geq 0} a_k z^k$$

↳ FUNÇÃO GERADORA P/ $(a_0, a_1, \dots)$

- SE $A(z)$ É UMA SÉRIE DE POTÊNCIAS, USAMOS $[z^n] A(z) = a_n$
- SE $A(z)$ E $B(z)$ SÃO FUNÇÕES GERADORAS PARA $(a_0, a_1, \dots)$ E $(b_0, b_1, \dots)$

CONSIDERE $A(z) \cdot B(z) = (a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots)(b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \dots)$

O COEF. DE z^m EM $A(z) \cdot B(z)$ É $a_0 b_m + a_1 b_{m-1} + a_2 b_{m-2} + \dots + a_m b_0$

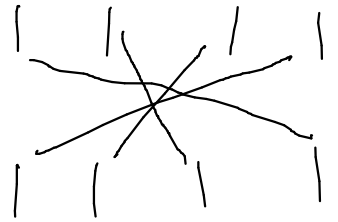
$$= \sum_{k=0}^m a_k b_{m-k}$$

↳ CONVOLUÇÃO DAS SEQUÊNCIAS

EX: A FUNÇÃO GERADORA DE $(1, 1, 1, \dots)$ É

$$f(z) = 1 + z + z^2 + z^3 + \dots = 1 + z f(z)$$

LOGO, TEMOS $f(z) = \frac{1}{1-z}$



EX: QUEM É A SEQUÊNCIA GERADA POR $\left(\frac{1}{1-z}\right)^2$?

VIMOS QUE $[z^n] A(z) \cdot B(z) = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$

$$\text{LOGO } [z^n] \left(\frac{1}{1-z}\right)^2 = [z^n] \left(\frac{1}{1-z}\right) \left(\frac{1}{1-z}\right) = \sum_{k=0}^n 1 \cdot 1 = n+1$$

E PORTANTO, TEMOS $\left(\frac{1}{1-z}\right)^2 = 1 + 2z + 3z^2 + 4z^3 + \dots$

4

EX: A SEQUÊNCIA GERADA POR

$$(1+z)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1 \cdot z^k = \binom{n}{0} \cdot z^0 + \binom{n}{1} z^1 + \binom{n}{2} z^2 + \dots + \binom{n}{n} z^n + 0 + \dots$$

$$\in \left(\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \dots, \binom{n}{n}, 0, 0, \dots \right) \quad \binom{n}{r}$$

$$(1+z)^r \text{ GERA } \left(\binom{r}{0}, \binom{r}{1}, \dots \right)$$

$$(1+z)^s \text{ GERA } \left(\binom{s}{0}, \binom{s}{1}, \dots \right)$$

$$\sum_{k=0}^{r+s} \binom{r+s}{k} z^k = (1+z)^{r+s} = \underline{(1+z)^r} \underline{(1+z)^s} = \sum_k \left(\sum_{t=0}^k \binom{r}{t} \binom{s}{k-t} \right) z^k$$

CONVOLUÇÃO DE VANDERMONDE

CONCLUÍMOS QUE

$$\binom{r+s}{k} = [z^k] (1+z)^{r+s} = \sum_{t=0}^k \binom{r}{t} \binom{s}{k-t}$$

EX: A SEQ. GENERATED FOR

$$(1-z)^m = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} (-1)^k z^k$$

$$= \left(\binom{m}{0}, -\binom{m}{1}, \binom{m}{2}, -\binom{m}{3}, \dots, 0, \dots \right)$$

O TEOREMA CHINÊS DO RESTO

FIXADOS $m_1, m_2, \dots, m_k$ $m_i \perp m_k$ PARA TODO $i \neq j$, E TOMA $m = m_1 \cdots m_k$

DADOS $x_1, \dots, x_k$, EXISTE UM ÚNICO $x \in \{0, \dots, m-1\}$ T.q.

$$x \equiv x_i \pmod{m_i} \quad \forall i$$

PROVA: PARA CADA i SEJA $M_i = \prod_{j \neq i} m_j$ OBSERVE QUE $m_i \cdot M_i = m \equiv 0 \pmod{m}$

COMO $m_i \perp m_j \quad \forall j \neq i$, ENTÃO EXISTE a_i T.q. $M_i \cdot a_i \equiv 1 \pmod{m_i}$
TOME $x = x_1 \cdot M_1 \cdot a_1 + x_2 \cdot M_2 \cdot a_2 + \dots + x_k \cdot M_k \cdot a_k = \sum x_i \cdot M_i \cdot a_i$

NOTE QUE $x \equiv x_i \cdot M_i \cdot a_i \equiv x_i \pmod{m_i}$. ISSO PROVA A EXISTÊNCIA.

SUPONHA QUE HÁ' x E y T.q. $x, y \equiv x_i \pmod{m_i} \quad \forall i$

LOGO, $x \equiv y \pmod{m_i}$, O QUE IMPLICA $x - y \equiv 0 \pmod{m_i}$.

LOGO, $x - y$ É MÚLTIPLO DE $m_i \quad \forall i$. ENTÃO $x - y$ É MÚLTIPLO DE m .

PORTANTO $x \equiv y \pmod{m}$. ISSO PROVA A UNICIDADE.

$$\text{Ex: } m_1 = 2 \quad m_2 = 5 \quad m = 10$$

$$(1, 2)$$

$$M_1 = 5$$

$$a_1 = 1$$

$$M_2 = 2$$

$$a_2 = 3$$

$$\left. \begin{array}{l} M_1 = 5 \\ a_1 = 1 \end{array} \right\} x = 1 \cdot 5 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \cdot 3 = 5 + 12 = 17$$

$$\downarrow$$

$$7$$

$$27$$

EX: $(1-z)^r$ é a FUNC. GER. DE $\left(\binom{r}{0}, -\binom{r}{1}, \binom{r}{2}, \dots \right)$
 $(1+z)^r$ é a FUNC. GER. DE $\left(\binom{r}{0}, \binom{r}{1}, \binom{r}{2}, \dots \right)$

TEMOS QUE $(1-z)^r (1+z)^r = ((1-z)(1+z))^r$
 $= (1-z^2)^r$ NÃO POSSUI COEFICIENTE
COM EXPOENTE ÍMPAR

$$= \sum_{k=0}^r \binom{r}{k} (-1)^{r-k} \underbrace{\left(z^2 \right)^k}_{z^{2k}}$$

PROP: $\frac{1}{(1-z)^n} = \sum_{k \geq 0} \binom{n+k}{n-1} z^k$

PROVA: INDUÇÃO EM n

BASE: $\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \dots = \sum_{k \geq 0} z^k = \sum_{k \geq 0} \binom{k+1}{0} z^k$

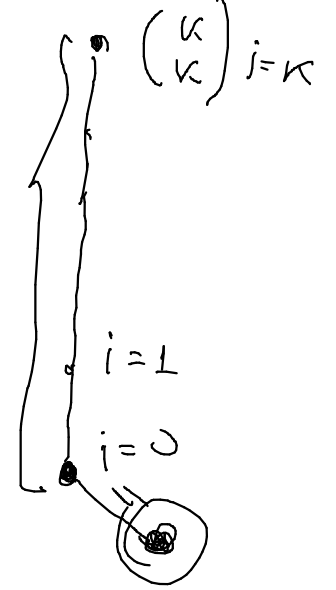
HI: SUPONHA QUE $\frac{1}{(1-z)^{n-1}} = \sum_{k \geq 0} \binom{n+k-1}{n-2} z^k$

PASSO INDUTIVO:

TEMOS $\frac{1}{(1-z)^n} = \frac{1}{(1-z)^{n-1}} \cdot \frac{1}{1-z} = \left(\sum_{k \geq 0} \binom{n+k-1}{n-2} z^k \right) (1 + z + z^2 + \dots)$

$= a_0 z^0 + a_1 z^1 + \dots$

$a_k = \binom{n+k-1}{n-2} + \binom{n+k-2}{n-2} + \binom{n+k-3}{n-2} + \dots = \sum_{i \geq 0} \binom{n+k-i}{n-2} = \binom{n+k}{n-1} \quad \square$



$$\frac{1}{(1-z)^{n+1}} = \sum_{k \geq 0} \binom{n+k+1}{n} z^k = \binom{n+1}{n} + \binom{n+2}{n} z + \binom{n+3}{n} z^2 + \dots$$

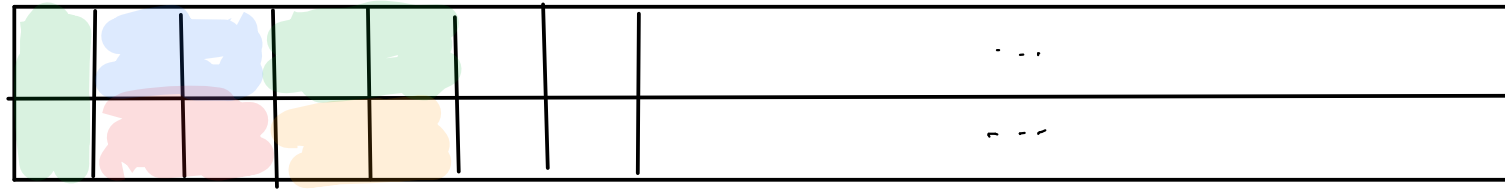
$$\frac{z^{n+1}}{(1-z)^{n+1}} = \sum_{k \geq 0} \binom{n+k+1}{n} z^{k+n+1} = \binom{n+1}{n} z^{n+1} + \binom{n+2}{n} z^{n+2} + \binom{n+3}{n} z^{n+3} + \dots$$

$$= \sum_{k \geq 0} \binom{k}{n} z^k$$

Em particular, se $A(z)$ é a função geradora de $a_0, a_1, \dots$

então $\frac{A(z)}{1-z}$ é a função geradora das somas parciais.

CONSIDERE UM RETÂNGULO $R(n)$ DE TAMANHO $2 \times n$



~> DE QUANTAS FORMAS POSSO PARTICIONAR $R(n)$ EM DOMINÓS?



~> LADRILAGEM

EX: $R(0)$ NÃO HÁ O QUE FAZER, HÁ UMA ÚNICA FORMA: NÃO COLOCAR NADA

$R(1)$: UM ÚNICO DOMINÓ NA VERTICAL

$R(2)$: DUAS FORMAS



$R(3)$:



IDEIA: TODA CONFIGURAÇÃO COMEÇA POR $\square$ OU $\begin{smallmatrix} \square \\ \square \end{smallmatrix}$

LOGO, O NÚMERO T_n DE CONFS. É DADO POR

$$\underline{T_n = T_{n-1} + T_{n-2}}$$

$\Rightarrow$ IGUAL AOS NÚMEROS DE FIBONACCI

IDEIA 2: "SOMAR" LADRILHAGENS

SOMA FORMAL, A MULTIPLICAÇÃO É A CONCATENAÇÃO NÃO-COMUTATIVA

COMUTATIVO:
 $a \cdot b = b \cdot a$

$\hookrightarrow \underbrace{\begin{smallmatrix} \square \\ \square \end{smallmatrix}} \neq \begin{smallmatrix} \square \\ \square \end{smallmatrix}$

$2 \begin{smallmatrix} \square \\ \square \end{smallmatrix}$

$$T = \overset{T(0)}{1} + \square + \begin{smallmatrix} \square \\ \square \end{smallmatrix} + \begin{smallmatrix} \square & \square \end{smallmatrix} + \begin{smallmatrix} \square \\ \square & \square \end{smallmatrix} + \begin{smallmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{smallmatrix} + \begin{smallmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{smallmatrix} + \dots$$

$$= 1 + \square \left(1 + \square + \begin{smallmatrix} \square \\ \square \end{smallmatrix} + \begin{smallmatrix} \square & \square \end{smallmatrix} + \begin{smallmatrix} \square \\ \square & \square \end{smallmatrix} + \begin{smallmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{smallmatrix} + \begin{smallmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{smallmatrix} + \dots \right) \\ + \begin{smallmatrix} \square \\ \square \end{smallmatrix} \left(1 + \square + \begin{smallmatrix} \square \\ \square \end{smallmatrix} + \begin{smallmatrix} \square & \square \end{smallmatrix} + \begin{smallmatrix} \square \\ \square & \square \end{smallmatrix} + \begin{smallmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{smallmatrix} + \begin{smallmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{smallmatrix} + \dots \right)$$

$$= 1 + \square \cdot T + \begin{smallmatrix} \square \\ \square \end{smallmatrix} \cdot T$$

IDEIA 2: "SOMAR" LADRILHAGENS

SOMA FORMAL, A MULTIPLICAÇÃO É A CONCATENAÇÃO NÃO-COMUTATIVA

$$T = \underset{R(0)}{1} + \boxed{} + \boxed{}\boxed{} + \boxed{}\boxed{}\boxed{} + \underbrace{\boxed{}\boxed{}\boxed{}}_{z^3} + \underbrace{\boxed{}\boxed{}\boxed{}}_{z^3} + \dots$$

$$\hookrightarrow \boxed{}\boxed{} \neq \boxed{}\boxed{}$$

$$2 \boxed{}\boxed{}$$

$$= 1 + \boxed{} \left(1 + \boxed{} + \boxed{}\boxed{} + \boxed{}\boxed{}\boxed{} + \boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{} + \boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{} + \dots \right) \\ + \boxed{}\boxed{} \left(1 + \boxed{} + \boxed{}\boxed{} + \boxed{}\boxed{}\boxed{} + \boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{} + \boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{} + \dots \right)$$

$$= 1 + \boxed{} \cdot T + \boxed{}\boxed{} \cdot T$$

$$\text{Logo } (1 - \boxed{} - \boxed{}\boxed{}) T = 1 \quad \leadsto \quad T = \frac{1}{1 - \boxed{} - \boxed{}\boxed{}}$$

SE TROCAMOS $\boxed{}$ POR z E $\boxed{}\boxed{}$ POR z^2 , OBTENHO

$$T(z) = \frac{1}{1 - z - z^2}$$

$$\text{NOTE QUE } R(n) = [z^n] T(z)$$

AGORA QUEREMOS RESOLVER $T(z) = \frac{1}{1-z-z^2}$

NOTE QUE $\frac{1}{1-x} = \sum_{k \geq 0} x^k$. SUBSTITUINDO x POR $z+z^2$, OBTÊMOS

$$T(z) = \sum_{k \geq 0} (z+z^2)^k \stackrel{\text{TEO BIN.}}{=} \sum_{k \geq 0} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} z^j z^{k-j}$$

TROCO

UTILIZAMOS MOEDAS 1, 5, 10, 25, 50. DE QUANTAS FORMAS PODEMOS

DAR UM TROCO?

~ A ORDEM DAS MOEDAS NÃO IMPORTA.

TROCO APENAS COM MOEDAS DE 1

$$P = \emptyset + \textcircled{1} + \textcircled{1}\textcircled{1} + \textcircled{1}\textcircled{1}\textcircled{1}$$

USANDO MOEDAS DE 1 E 5

$$N = P + \textcircled{5}P + \textcircled{5}^2P + \dots = (\emptyset + \textcircled{5} + \textcircled{5}^2 + \dots) \cdot P$$

NO FINAL DAS CONTAS, OS TROCOS POSSÍVEIS SÃO

$$C = (\emptyset + \textcircled{50} + \textcircled{50}^2 + \dots) (\emptyset + \textcircled{25} + \textcircled{25}^2 + \dots) \cdot \dots \cdot (\emptyset + \textcircled{1} + \textcircled{1}^2 + \dots)$$

$$C = (\emptyset + \textcircled{50} + \textcircled{50}^2 + \dots) (\emptyset + \textcircled{25} + \textcircled{25}^2 + \dots) \cdot \dots \cdot (\emptyset + \textcircled{1} + \textcircled{1}^2 + \dots)$$

SUBSTITUINDO $\textcircled{50}$ POR z^{50} , $\textcircled{25}$ POR z^{25} , $\dots$

O TRACO DE n É PRECISAMENTE O COEFICIENTE DE z^n

ASSIM, COMO $\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \dots$, TEMOS

$$C(z) = \frac{1}{1-z^{50}} \cdot \frac{1}{1-z^{25}} \cdot \frac{1}{1-z^{10}} \cdot \frac{1}{1-z^5} \cdot \frac{1}{1-z}$$

$\leadsto$ NÚMERO DE PARTIÇÕES

DADA FUNÇÃO GERADORA

$$\underline{\underline{A(z)}} = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \underline{\underline{a_3 z^3}} + \dots$$

NOTE QUE

$$A(0) = a_0$$

$$A'(z) = a_1 + 2a_2 z + 3a_3 z^2 + \dots$$

$$\Rightarrow A'(0) = a_1$$

$$A''(0) = 2a_2$$

$$A'''(0) = 6a_3$$

;

$$A^{(n)}(0) = n! a_n$$

HÁ DOIS TIPOS DE FORMA FECHADA : $G(z) = \sum g_n z^n$

- a) UMA EQUAÇÃO PARA $G(z)$
b) UMA EQUAÇÃO PARA g_n
- } "DUALIDADE"

LEMBRE-SE QUE UMA SÉRIE $\sum g_n z^n$ CONVERGE (ABSOLUTAMENTE) SE E SÓ SE
EXISTE UMA CONSTANTE A T.q. $\sum_{k=0}^r |g_k z^k| \leq A \quad \forall r$

LOGO, COMO $G(0) = g_0$, EXISTE z_0 T.q. $G(z)$ CONVERGE $\forall z \leq z_0$

PROPRIEDADES

$F(z)$ e $G(z)$ SÃO FUNC. GERADORAS DE $\langle f_n \rangle$ e $\langle g_n \rangle$

• COMBINAÇÃO LINEAR: SEJAM α e β CONSTANTES

$$\leadsto \alpha F(z) + \beta G(z) = \alpha \sum f_n z^n + \beta \cdot \sum g_n z^n = \sum (\alpha f_n + \beta g_n) z^n$$

É A FUNÇÃO GERADORA DE $\langle \alpha f_n + \beta g_n \rangle$

• DESLOCAMENTO:

$$\leadsto z^m G(z) = \sum_{n \geq 0} g_n z^{m+n} = \sum_{n \geq 0} g_{n-m} z^n$$

$\leadsto$ TEMOS QUE PENSAR

$$\text{QUE } g_{-1} = g_{-2} = \dots = 0$$

É A FUNÇÃO GERADORA DE $\langle \underbrace{0, 0, 0, \dots, 0}_m, g_0, g_1, \dots \rangle$

$$\frac{G(z) - g_0 - \dots - g_{m-1} z^{m-1}}{z^m} = \frac{g_m z^m + g_{m+1} z^{m+1} + \dots}{z^m} = g_m + g_{m+1} z + \dots$$

$$\leadsto \frac{G(z) - g_0 - g_1 z - g_2 z^2 - \dots - g_{m-1} z^{m-1}}{z^m} = \sum_{n \geq m} g_n z^{n-m} = \sum_{n \geq 0} g_{n+m} z^n$$

• SUBSTITUIR z POR Cz

$$\leadsto G(Cz) = \sum g_n (Cz)^n = \sum (g_n C^n) z^n$$

É A FUNC. GER. DE $\langle C^n g_n \rangle$ (JÁ VIMOS COM $C = -1$)

• DERIVAÇÃO

$$\leadsto G'(z) = \sum_{n \geq 0} n g_n z^{n-1} = \sum_{n \geq 0} (n+1) g_{n+1} z^n$$

É A FUNC. GER. DE $\langle (n+1) g_{n+1} \rangle$

• INTEGRAÇÃO

$$\leadsto \int_0^z G(t) dt = g_0 z + \frac{g_1 z^2}{2} + \frac{g_2 z^3}{3} + \dots = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} g_{n-1} z^n$$

É A FUNC. GER. DE $\langle g_{n-1}/n \rangle$

OBS: SE QUEREMOS A FUNC. GER. DE $\langle g_n/n \rangle$, DEVEMOS DESLOCAR:
PARA ESQ. TROCANDO $G(t)$ POR $\frac{G(t) - g_0}{t}$ NA INTEGRAL

• MULTIPLICAÇÃO

$$F(z) \cdot G(z) = \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{k \geq 0} f_k g_{n-k} \right) z^n$$

É A FUNC. GER. DE $\langle \sum_{k \geq 0} f_k g_{n-k} \rangle$

Relações de Recorrência

• Suponha que $\langle g_m \rangle$ seja dada por uma relação de recorrência

MA GOSTARÍAMOS DE ENCONTRAR UMA FÓRMULA ? g_m EM FUNÇÃO DE m

ESTRATÉGIA

1. ESCREVER FÓRMULA GERAL
2. MULTIPLICAR POR z^m
3. SOMAR SOBRE $m \Rightarrow$ OBTENDO $G(z)$ EM VÁRIOS LUGARES
4. SIMPLIFICAR PARA OBTER UMA FUNÇÃO DE $G(z)$.

EX: FIBONACCI

$$g_n = \begin{cases} 0 & \text{se } n \leq 0 \\ 1 & \text{se } n = 1 \\ g_{n-1} + g_{n-2} & \text{se } n \geq 2 \end{cases}$$

1. Fórmula Geral $g_n = g_{n-1} + g_{n-2} + [n=1]$

2. Multiplica por z^n :

$$z^n g_n = z^n g_{n-1} + z^n g_{n-2} + z^n [n=1]$$

3 Somar sobre n

$$\underbrace{\sum_n z^n g_n}_{G(z)} = \underbrace{\sum_n z^n g_{n-1}}_{z G(z)} + \underbrace{\sum_n z^n g_{n-2}}_{z^2 G(z)} + \underbrace{\sum_n z^n [n=1]}_z$$

$$\Rightarrow G(z) = z G(z) + z^2 G(z) + z \quad \Rightarrow G(z) = \frac{z}{1 - z - z^2}$$

TEOREMA DA EXPANSÃO RACIONAL:

OBSERVE QUE AS RAÍZES DE Q
SÃO $\frac{1}{p_1}, \frac{1}{p_2}, \dots$

SEJA $R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$, EM QUE $Q(z) = q_0 (1 - p_1 z) (1 - p_2 z) \dots (1 - p_l z)$

COM $p_i \neq p_j$ E $P(z)$ FOR UM POLINÔMIO DE GRAU MENOR QUE l . ENTÃO

$$[z^n] R(z) = a_1 \cdot p_1^n + a_2 \cdot p_2^n + \dots + a_l p_l^n, \text{ EM QUE } a_k = -p_k \frac{P\left(\frac{1}{p_k}\right)}{Q'\left(\frac{1}{p_k}\right)}$$

EX: FIBONACCI $G(z) = \frac{z}{1-z-z^2} \left\{ \begin{array}{l} P(z) \\ Q(z) \end{array} \right.$

RAÍZES DE $Q(z)$: $a=1, b=-1, c=-1$, $\Delta = 1+4=5$ $Q'(z) = -1-2z$

$$\phi = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \quad \text{E} \quad \hat{\phi} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

EM PARTICULAR, $Q(z) = (z - \phi) (z - \hat{\phi}) \cdot q'_0 = \left(z \cdot \frac{1}{\phi} - 1\right) \left(z \cdot \frac{1}{\hat{\phi}} - 1\right) \cdot \underbrace{q_0 \cdot \hat{\phi} \cdot \phi \cdot q'_0}_{1}$

$$a_1 = -p_1 \frac{P(1/p_1)}{Q'(1/p_1)}$$

$$= -\frac{1}{\cancel{\phi}} \cdot \frac{\cancel{\phi}}{-1-2\phi} = \frac{1}{1+2\phi}$$

$$= \frac{1}{2-\sqrt{5}}$$

$$a_2 = -p_2 \frac{P(1/p_2)}{Q'(1/p_2)} = -\frac{1}{\hat{\phi}} \frac{\hat{\phi}}{-1-2\hat{\phi}} = \frac{1}{2+\sqrt{5}}$$

$$f_n = a_1 \left(\frac{1}{\phi}\right)^n + a_2 \left(\frac{1}{\hat{\phi}}\right)^n = \frac{1}{\sqrt{5}} \phi^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \hat{\phi}^n$$

$$[z^n]Q(z) = a_1 \cdot p_1^n + a_2 \cdot p_2^n + \dots + a_k \cdot p_k^n, \text{ em } a_k = -p_k \frac{P(1/p_k)}{Q'(1/p_k)}$$

ex. Fibonacci $G(z) = \frac{z}{1-z-z^2} \} P(z)$

raízes de $Q(z)$: $a=1, b=-1, c=-1, \Delta=1+4=5$ $Q'(z)=-1-2z$

$$\phi = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \quad \hat{\phi} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Em particular, $Q(z) = (z-\phi)(z-\hat{\phi}) \cdot q_0' = (z \cdot \frac{1}{\phi} - 1)(z \cdot \frac{1}{\hat{\phi}} - 1) \cdot \underbrace{\phi \cdot \hat{\phi} \cdot q_0'}_{q_0}$

$$[z^n]Q(z) = a_1 \cdot p_1^n + a_2 \cdot p_2^n$$

$$a_1 = -\cancel{p_1} \cdot \frac{\cancel{P(1/p_1)}}{Q'(1/p_1)} = \frac{-1}{-1-2/p_1} = \frac{p_1}{p_1+2}$$

EX: SEQUÊNCIAS SIMULTANEAMENTE RECURSIVAS

$$u_0 = 1$$

$$u_1 = 0$$

$$u_n = 2v_{n-1} + u_{n-2}$$

$$v_0 = 0$$

$$v_1 = 1$$

$$v_n = u_{n-1} + v_{n-2}$$

$$n \geq 2$$

1) ACHAR EQS ABSOLUTAS

$$u_n = 2v_{n-1} + u_{n-2} + [n=0]$$

$$v_n = u_{n-1} + v_{n-2}$$

2) MULTIPLICAR POR z^n

$$z^n u_n = 2z \cdot z^{n-1} v_{n-1} + z^2 \cdot z^{n-2} u_{n-2} + z^n [n=0]$$

$$z^n v_n = 2z \cdot z^{n-1} u_{n-1} + z^2 \cdot z^{n-2} v_{n-2}$$

$$z^n u_n = z z \cdot z^{n-1} v_{n-1} + z^2 \cdot z^{n-2} u_{n-2} + \underbrace{z^n [n=0]}$$

$$z^n v_n = z \cdot z^{n-1} u_{n-1} + z^2 \cdot z^{n-2} v_{n-2}$$

3) Somatórios

$$u(z) = z z \cdot v(z) + z^2 u(z) + 1$$

$$v(z) = z u(z) + z^2 v(z)$$

$$\Rightarrow u(z) = \frac{(1-z^2) z z v(z) + 1}{1-z^2}$$

$$\Rightarrow v(z) = \frac{z}{1-z^2} u(z)$$

SUBSTITUINDO

$$z z v(z) + 1 = (1-z^2) u(z) = \frac{(1-z^2)^2}{z} v(z) \Rightarrow v(z) = \frac{z}{(1-z^2)^2 - z z^2}$$

$$u(z) = \frac{(1-z^2) v(z)}{z} = \frac{(1-z^2)}{1-4z^2+z^4} = (1-z^2) W(z^2) = \frac{z}{1-4z^2+z^4} = \underline{z W(z^2)}$$

EM QWE $W(x) = \frac{1}{1-4x+x^2} \begin{matrix} \nearrow 2+\sqrt{3} \\ \nwarrow 2-\sqrt{3} \end{matrix}$

$$z z V(z) + 1 = (1-z^2) u(z) = \frac{(1-z^2)^2}{z} V(z) \Rightarrow V(z) = \frac{z}{(1-z^2)^2 - z z^2}$$

$$u(z) = \frac{(1-z^2) V(z)}{z} = \frac{(1-z^2)}{1-4z^2+z^4} = (1-z^2) W(z^2) = \frac{z}{1-4z^2+z^4}$$

$$\text{EM } a_n \in \mathbb{C} \quad W(x) = \frac{1}{1-4x+x^2} \quad \begin{matrix} \nearrow 2+\sqrt{3} \\ \nwarrow 2-\sqrt{3} \end{matrix} \quad = \frac{z}{1-4z^2+z^4} = \underline{z W(z^2)}$$

$$u(z) = (1-z^2) W(z^2)$$

$$V(z) = z W(z^2)$$

$$W(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots$$

$$V_{2m+1} = W_m = \frac{3+2\sqrt{3}}{6} (2+\sqrt{3})^m + \frac{3-2\sqrt{3}}{6} (2-\sqrt{3})^m \quad W(z^2) = a_0 + a_1 z^2 + a_2 z^4 + \dots$$

$$V(z) = z W(z^2) = a_0 z + \underline{a_1} z^3 + \underline{a_2} z^5 + \dots$$

$$U_{2m} = W_m - W_{m-1}$$

$$= \frac{(2+\sqrt{3})^m}{3-\sqrt{3}} + \frac{(2-\sqrt{3})^m}{3+\sqrt{3}}$$

$$W(z^2) = a_0 + a_1 z^2 + a_2 z^4 + \dots$$

$$-z^2 W(z^2) = -a_0 z^2 - a_1 z^4 - a_2 z^6 + \dots$$

$$(1-z^2) W(z^2) = a_0 + (a_1 - a_0) z^2 + (a_2 - a_1) z^4 + \dots$$

CONVOLUÇÕES E RELAÇÕES DE RECORRÊNCIA

• DADA UMA SEQ. $X_0, \dots, X_m$

DE QUANTAS FORMAS PODEMOS CALCULAR O PRODUTO

$$X_0 \cdot X_1 \cdots \cdot X_m$$

• DE QUANTAS FORMAS POSSO ESCOLHER PARÊNTESES
PARA TER APENAS OPERAÇÕES BINÁRIAS.

EX: $X_0 \cdot X_1$: UMA ÚNICA FORMA

$(X_0 \cdot X_1) \cdot X_2$ $X_0 \cdot (X_1 \cdot X_2)$: DUAS FORMAS

$X_0 \cdot (X_1 (X_2 \cdot X_3))$, $X_0 \cdot ((X_1 \cdot X_2) X_3)$, $(X_0 X_1) \cdot (X_2 X_3)$, $(X_0 (X_1 X_2)) \cdot X_3$
 $((X_0 X_1) X_2) \cdot X_3$

$$C_1 = 1, \quad C_2 = 2, \quad C_3 = 5$$

- A ÚLTIMA MULTIPLICAÇÃO DIVIDE A SEQUÊNCIA EM DUAS

$$\underbrace{(x_0 \dots x_k)}_{k+1} \cdot \underbrace{(x_{k+1} \dots x_n)}_{n-k}$$

- FIXADA ESSA MULTIPLICAÇÃO, DENTRO DOS PARÊNTESES PODEMOS FAZER DE C_k E C_{n-k-1} FORMAS

- logo $C_n = C_0 \cdot C_{n-1} + C_1 \cdot C_{n-2} + \dots + C_{n-1} \cdot C_0$ SE $n > 0$

$$C_n = \sum_k C_k \cdot C_{n-1-k} + [n=0]$$

$$\begin{aligned} C(z) &= \sum_n z^n C_n = \sum_n \sum_k z^n C_k \cdot C_{n-1-k} + 1 \\ &= \sum_k \sum_n z^n C_k \cdot C_{n-1-k} + 1 = \sum_k z^k C_k \cdot \sum_n z^{n-k} C_{n-1-k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 C(z) &= \sum_n z^n C_n = \sum_n \sum_k z^n C_k \cdot C_{n-1-k} + 1 \\
 &= \sum_k \sum_n z^n C_k \cdot C_{n-1-k} + 1 = \left(\sum_k z^k C_k \right) \cdot z \cdot \sum_n z^{n-k-1} C_{n-1-k} + 1
 \end{aligned}$$

$$= C(z) \cdot z \cdot C(z) + 1$$

$$\text{Logo, } zC(z)^2 - C(z) + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad C(z) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4z}}{2z}$$

Há duas soluções : $\left(-\sqrt{1-4z} \right)' = -\frac{1}{2} \cdot \frac{-4}{\sqrt{1-4z}}$

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{1 + \sqrt{1-4z}}{2z} \left\{ \begin{array}{l} \xrightarrow{z \rightarrow 2} \\ \xrightarrow{z \rightarrow 0} \end{array} \right\} = 0$$

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1-4z}}{2z} = 1$$

$$C(z) = \frac{1 - \sqrt{1-4z}}{2z}$$

TEO BIN.

$$\sqrt{1-4z} = (1-4z)^{1/2} = \sum_{k \geq 0} \binom{1/2}{k} (-4z)^k$$

ABSORÇÃO

$$= 1 + \sum_{k \geq 1} \frac{1}{2k} \binom{-1/2}{k-1} (-4z)^k$$

Logo,

$$C(z) = \frac{1 - \sqrt{1-4z}}{2z} = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\binom{2n}{n} \frac{z^n}{n+1}}_{C_n}$$

$$(x+y)^n = \sum_k \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

$C_0, C_1, C_2, \dots$

C_n

$$C(z) = \sum C_n z^n$$

$$\binom{-1/2}{n} = \left(-\frac{1}{4}\right)^n \binom{2n}{n}$$

$$\frac{x^2-1}{x} = \frac{x^2}{x} - \frac{1}{x} = \left(\frac{x}{\cancel{x}} \right) - \left(\frac{1}{x} \right)$$

$$x^2-1 =$$

PROBABILIDADE DISCRETA

ESPAÇO DE PROBABILIDADE = (Ω, P)

CONS. DE TUDO
QUE PODE ACONTECER

Ω = ESPAÇO AMOSTRAL

P é a FUNÇÃO DE PROBABILIDADE ^{MASSA} $P: \Omega \rightarrow [0, 1]$ TAL QUE

DISTRIBUIÇÃO

$$\sum_{\omega \in \Omega} P(\omega) = 1$$

ALGUMA COISA
TEM QUE ACONTECER

EX: PAR DE DADOS $\mathcal{D}^2 = \{\square\square, \square\square, \dots, \square\square\}$

$$\Omega = \mathcal{D}^2, \quad |\Omega| = 36$$

ESTOU ASSUMINDO QUE $\square\square \neq \square\square$

SE OS DADOS SÃO **HONESTOS**, i.e., $P(w) = P(w') \quad \forall w, w' \in \Omega$
 $= 1/36$

PARA TODO

DEF: Um **EVENTO** é um subconjunto de Ω

EX: DADOS COM FACES IGUAIS $I = \{\square 1, \square 2, \dots, \square 6\}$

A PROBABILIDADE DE UM EVENTO A é

$$P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\omega)$$

DEF: Uma **VARIÁVEL ALEATÓRIA** é uma função $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$

EX: $\Omega = D^2$

$S: \Omega \rightarrow \mathbb{N}$ COMO A SOMA DOS DADOS

$$S(\square 2 \square 3) = 5$$

Qual é a probabilidade de $S = 7$ $\xrightarrow{\text{A DEFINE UM EVENTO}}$ $A_{S=7} = \{\omega \in \Omega : S(\omega) = 7\}$

- Uma variável aleatória pode ser caracterizada pela distribuição de probabilidade dos seus valores.

- Então podemos trabalhar com o espaço de probabilidade dos valores das variáveis

EX:

$$\Omega = D^2$$

$$\Omega_s = \left\{ 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 \right\}$$
$$s = \frac{1}{36}, \frac{2}{36}, \frac{3}{36}, \frac{4}{36}, \frac{5}{36}, \frac{6}{36}, \frac{5}{36}, \frac{4}{36}, \frac{3}{36}, \frac{2}{36}, \frac{1}{36}$$

- SE DUAS VARIÁVEIS ALEATÓRIAS ESTÃO DEFINIDAS NO MESMO ESPAÇO
PODEMOS ESTUDAR A "DISTRIBUIÇÃO CONJUNTA"

$$P(X=x \text{ e } Y=y)$$

$$\hookrightarrow A_{X=x \text{ e } Y=y} = \left\{ \omega \in \Omega : X(\omega)=x \text{ e } Y(\omega)=y \right\}$$

DIZEMOS QUE X E Y SÃO **INDEPENDENTES** SE

$$P(X=x \text{ e } Y=y) = P(X=x) \cdot P(Y=y) \quad \forall x, y$$

$$\text{EX: } \Omega = D^2$$

S_1 = valor do primeiro dado

S_2 = valor do segundo dado

SÃO INDEPENDENTES

EX: $\Omega = D^2$ $S_1 = \text{valor do primeiro dado}$
 $S_2 = \text{valor do segundo dado}$

SÃO INDEPENDENTES

EX: $S = S_1 + S_2$ e $P = S_1 \cdot S_2$ NÃO SÃO INDEPENDENTES

$$P(S=2) = \frac{1}{36}$$

↓
só quando
sai 11

$$P(P=2) = \frac{1}{18}$$

↕
quando sai 12 ou 21

$$P(S=2 \text{ e } P=2) = 0 \neq \frac{1}{36} \cdot \frac{1}{18}$$

• Qual o valor médio de uma sequência?

- MÉDIA = $\frac{\text{SOMA DOS VALORES}}{\text{NÚMERO DE VALORES}}$
- MEDIANA = O valor do meio
- MODA = O valor mais frequente

EX: (3, 1, 4, 1, 5)

$$\text{MÉDIA} = 14/5, \text{ MEDIANA} = 3, \text{ MODA} = 1$$

- É DE UMA VARIÁVEL ALEATÓRIA?

- MÉDIA : $\sum_{x \in X(\Omega)} x \cdot P(X=x)$

$X(\Omega)$ = CONJUNTO DOS VALORES QUE X PODE ASSUMIR.

- MEDIANA: O CONJUNTO DOS x T.q.

$$P(X \leq x) \geq \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad P(X \geq x) \geq \frac{1}{2}$$

- MODA : O CONJUNTO DOS x T.q. $P(X=x) \geq P(X=x')$ PARA TODO $x' \in X(\Omega)$

- A MÉDIA TAMBÉM É CONHECIDA COMO ESPERANÇA OU VALOR ESPERADO

$$EX = E(X) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \cdot P(\omega) = \sum_{\substack{\omega \in \Omega \\ x \in X(\Omega)}} x \cdot P(\omega) [X = X(\omega)]$$

$$\Omega_x = \{ \omega \in \Omega : X(\omega) = x \}$$

$$= \sum_{x \in X(\Omega)} x \cdot \sum_{\omega \in \Omega} P(\omega) [X = X(\omega)]$$

$$A_{X=x}$$

$$P(X=x)$$

$$= \sum_{x \in X(\Omega)} x \cdot P(X=x)$$

$$\sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \cdot P(\omega) = \sum_x \sum_{\omega \in \Omega_x} X(\omega) P(\omega) = \sum_x \sum_{\omega \in \Omega_x} x P(\omega)$$

$$= \sum_x x \sum_{\omega \in \Omega_x} P(\omega) = \sum_x x P(\Omega_x) = \sum_x x P(X=x)$$

Se X e Y são duas variáveis aleatórias e Ω

$$\begin{aligned} E(\alpha X + \beta Y) &= \sum_{\omega \in \Omega} (\alpha X(\omega) + \beta Y(\omega)) P(\omega) \\ &= \sum_{\omega \in \Omega} \alpha X(\omega) P(\omega) + \sum_{\omega \in \Omega} \beta Y(\omega) P(\omega) \\ &= \alpha \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) P(\omega) + \beta \sum_{\omega \in \Omega} Y(\omega) P(\omega) \\ &= \alpha EX + \beta EY \end{aligned}$$

Combinação linear

Multiplicação

→ SE X E Y SÃO INDEPENDENTES

$$E(X \cdot Y) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) Y(\omega) P(\omega) = \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ y \in Y(\Omega)}} xy P(X=x \text{ e } Y=y)$$

$$= \sum_{x \in X(\Omega), y \in Y(\Omega)} xy \cdot P(X=x) \cdot P(Y=y) = \sum_{x \in X(\Omega)} \sum_{y \in Y(\Omega)} xy P(X=x) \cdot P(Y=y)$$

$$= \sum_x x P(X=x) \sum_y y P(Y=y) = EX \cdot EY$$

MÉDIA E VARIÂNCIA

$$(X^2)_{(\omega)} = (X(\omega))^2$$

- PROPRIEDADE MAIS IMPORTANTE DE UMA VARIÁVEL DEPOIS DA ESPERANÇA

DADA VARIÁVEL X , CONSIDERE $Z = (X - EX)^2 = X^2 - 2XEX + (EX)^2$

A VARIÂNCIA DE X É

$$VX = EZ = E((X - EX)^2) = E(X^2 - 2XEX + (EX)^2)$$

$$= E(X^2) + E(-2XEX) + E((EX)^2)$$

$$= E(X^2) - 2EX EX + (EX)^2$$

$$= E(X^2) - (EX)$$

$$\mu = EX$$

$$VX = E(X^2 - 2X\mu + \mu^2) = E(X^2) - 2\mu EX + \mu^2$$

↳ SEMPRE POSITIVA PORQUE Z É SEMPRE POSITIVA

$$= E(X^2) - \mu^2 = E(X^2) - (EX)^2$$

DOIS SORTEIOS.

~ POSSO COMPRAR DOIS BILHETES

a) COMPRO DOIS BILHETES PARA O MESMO SORTEIO

b) COMPRO UM BILHETE PARA CADA SORTEIO.

SUPONHA QUE O NÚMERO DE BILHETES É 100.

X_i É O VALOR QUE O i -ÉSIMO BILHETE GANHA

$i=1,2$

↗ VALOR DO PRÊMIO

$$P(X_i = 1) = \frac{1}{100}$$

$$P(X_i = 0) = \frac{99}{100}$$

$$a) EX_i = \frac{99}{100} \cdot 0 + \frac{1}{100} \cdot 1 = \frac{1}{100} : E(X_1 + X_2) = EX_1 + EX_2 = \frac{2}{100}$$

b) $X = \# \text{ BILHETES QUE GANHARAM } \in \{0, 1, 2\}$

$$P(X=2) = \frac{1}{100^2}, \quad P(X=1) = \frac{198}{100^2}, \quad P(X=0) = \frac{100^2 - 1 - 198}{100^2}$$

$$EX = 0 \cdot \cancel{P(X=0)} + 1 \cdot \cancel{P(X=1)} + 2 \cdot \cancel{P(X=2)} = \frac{198 + 2}{100^2} = \frac{200}{100^2} = \frac{2}{100}$$

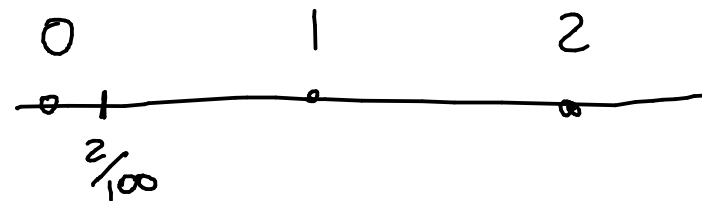
100	x	100
1		99
99		1

	0	1	2
a)	$98/100$	$2/100$	0
b)	$(99/100)^2$	$198/100^2$	$1/100^2$

A DISTRIBUIÇÃO EM
b) É DISPERSA

$$\left(\frac{99}{100}\right)^2 > \frac{98}{100}$$

$$\frac{199}{100^2} < \frac{2}{100}$$



$$VY = E(Y^2) - (EY)^2 \rightarrow EY^2 = \left(\frac{2}{100}\right)^2 = \left(\frac{4}{100^2}\right)$$

$$E((X_1 + X_2)^2) = E(X_1^2 + 2X_1X_2 + X_2^2) = \sum_{\substack{x_1=0,1 \\ x_2=0,1}} (x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2) \cdot P(X_1=x_1, X_2=x_2)$$

a) DOIS NO MESMO SORTEIO

$$V(X_1 + X_2) = E((X_1 + X_2)^2) - E(X_1 + X_2)^2$$

$$= \frac{2}{100} - \frac{4}{100^2} = \frac{196}{100^2}$$

$$= 0 + 1 \cdot \frac{1}{100} + 1 + \frac{1}{100} + 4 \cdot 0 = \frac{2}{100}$$

(0,0) (1,0) (0,1) (1,1)

$$VX = E(X^2) - (EX)^2$$

$$E(X^2) = \sum_{x=0,1,2} x^2 \cdot P(X=x) = 0^2 \cdot P(X=0) + 1^2 \cdot P(X=1) + 2^2 \cdot P(X=2)$$

$$= 0 + \frac{198}{100^2} + \underline{4 \cdot \frac{1}{100^2}} = \frac{202}{100^2}$$

$$VX = \frac{202}{100^2} - \frac{4}{100^2} = \frac{198}{100^2}$$

QUANDO X E Y SÃO VARIÁVEIS INDEPENDENTES TEMOS

$$V(X+Y) = E((X+Y)^2) - (E(X+Y))^2$$

$$= E(X^2 + 2XY + Y^2) - (EX + EY)^2$$

$$= E(X^2) + 2E(XY) + E(Y^2) - (EX)^2 - 2EXEY - (EY)^2$$

$$= E(X^2) + \cancel{2EXEY} + E(Y^2) - (EX)^2 - \cancel{2EXEY} - (EY)^2$$

$$= VX + VY$$

DESIGUALDADE DE MARKOV

SE X É UMA VARIÁVEL POSITIVA, ENTÃO $P(X \geq a) \leq \frac{EX}{a}$

PROVA:

$$EX = \sum_{x \in X(\Omega)} x P(X=x) = \underbrace{x_1 \cdot P(X=x_1) + \dots}_{< a} + \underbrace{x_k \cdot P(X=x_k)}_{\geq a}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ x \geq a}} x P(X=x) &\geq \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ x \geq a}} a P(X=x) = a \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ x \geq a}} P(X=x) \\ &= a P(X \geq a) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow P(X \geq a) \leq \frac{EX}{a}$$

DESIGUALDADE DE CHEBYCHEV

$$P(X \geq a) \leq \frac{EX}{a}$$

$$P((X - EX)^2 \geq \alpha) \leq \frac{VX}{\alpha} \quad \alpha > 0$$

PROVA:

APLICAMOS MARKOV COM A VARIÁVEL $Z = (X - EX)^2 \geq 0$

$$P((X - EX)^2 \geq \alpha) = P(Z \geq \alpha) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{MARKOV}}}{\leq} \frac{EZ}{\alpha} = \frac{VX}{\alpha}$$



DANDO OUTROS NOMES: $\mu = EX$ e $\sigma = \sqrt{VX}$

TOME $\alpha = c^2 \sigma^2$, POR CHEBYCHEV.

$$P(|X - \mu| \geq c \cdot \sigma) = P((X - \mu)^2 \geq c^2 \sigma^2 = \alpha) \leq \frac{VX}{\alpha} = \frac{VX}{c^2 VX} = \frac{1}{c^2}$$

COM $c=10$, A PROBABILIDADE DE QUALQUER VAR. ALI

~

DANDO OUTROS NOMES: $\mu = EX$ e $\sigma = \sqrt{VX}$

TOME $\alpha = c^2 \sigma^2$, POR CHEBYCHEV.

$$P(|X - \mu| \geq c \cdot \sigma) = P((X - \mu)^2 \geq c^2 \sigma^2 = \alpha) \leq \frac{VX}{\alpha} = \frac{VX}{c^2 VX} = \frac{1}{c^2}$$

COM $c=10$, A PROBABILIDADE DE QUALQUER VAR. AL.

ESTAR 10 DESVIOS PADRÃO LONGE DA MÉDIA É $\frac{1}{100}$

→ Uma var. al. fica DENTRO DE $(\mu - 10\sigma, \mu + 10\sigma)$
em 99% DOS CASOS.

Como usar a desigualdade de Chebyshev?

$$X \text{ var. al.} \quad \mu = EX \quad \text{e} \quad \sigma = \sqrt{VX}$$

Considere o espaço Ω^n das seqüências de n eventos elementares de Ω

$$(w_1, \dots, w_n) \in \Omega^n \quad \text{se} \quad w_i \in \Omega$$

Para $k \in \{1, \dots, n\}$ seja $X_k: \Omega^n \rightarrow \mathbb{R}$ a var. t.q.

$$X_k(w_1, \dots, w_n) = X(w_k)$$

Defina $X' = X_1 + \dots + X_n$ que é a soma de var. al. independ.

$$\begin{aligned} \text{Note que} \quad \underline{EX'} &= \underline{EX_1} + \underline{EX_2} + \dots + \underline{EX_n} = n \underline{EX} = n\mu \\ \underline{VX'} &= \underline{VX_1} + \underline{VX_2} + \dots + \underline{VX_n} = n \underline{VX} = n\sigma^2 \end{aligned}$$

$$\sigma' = \sqrt{n}\sigma$$

NOTE QUE $\underline{EX'} = \underline{EX_1} + \underline{EX_2} + \dots + \underline{EX_n} = n \underline{EX} = n \underline{\mu}$

$\underline{VX'} = \underline{VX_1} + \underline{VX_2} + \dots + \underline{VX_n} = n \underline{VX} = n \underline{\sigma^2}$

$\sigma' = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

A variável $X^* = \frac{X'}{n}$ fica entre $\mu - 10 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ e $\mu + 10 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ 99% dos casos

NOTE QUE QUANDO $n \rightarrow \infty$ TEMOS $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu - \frac{10\sigma}{\sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu + \frac{10\sigma}{\sqrt{n}} = \mu$

O valor médio pode estar perto da média o quanto quisermos,
BASTA ESCOLHER n SUFICIENTEMENTE GRANDE

Pela desigualdade de Chebyshev, como $EX' = nEX$ e $\sqrt{VX'} = \sqrt{n} \sqrt{VX}$,
 Tomando $\mu = EX$ e $\sigma = \sqrt{VX}$ e $\mu' = EX' = n\mu$ e $\sigma' = \sqrt{VX'} = \sqrt{n} \sigma$

A var. $X' = X_1 + \dots + X_n$ é tal que

$$P(|X' - \mu'| \geq 10\sigma') \leq \frac{1}{100}$$

||

$$P(|X' - n\mu| \geq 10\sqrt{n}\sigma) \leq \frac{1}{100}$$

DIVIDINDO
TUDO
POR n

||

$$= \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$$

$$P\left(\left|\frac{X'}{n} - \mu\right| \geq \frac{10\sigma}{\sqrt{n}}\right) \leq \frac{1}{100}$$

Ou seja, a média $X^* = \frac{X'}{n}$ dos X_i 's fica entre $\mu - \frac{10\sigma}{\sqrt{n}}$ e $\mu + \frac{10\sigma}{\sqrt{n}}$
 em 99% dos casos.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu - \frac{10\sigma}{\sqrt{n}} = \mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu + \frac{10\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$a > b$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\frac{a}{n} > \frac{b}{n}$$

COMO ESTIMAR A MÉDIA DE UMA VAR. ALEATÓRIA?

• EXPERIMENTOS $X_1, \dots, X_n$.

A MÉDIA DOS SEUS EXPERIMENTOS É

$$\hat{EX} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

A DE MÉDIA DE $\hat{EX}$ É

$E(X)$

$$E(\hat{EX}) = E\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \overbrace{E(X_i)}^{E(X)} = \frac{1}{n} \cdot n E(X) = EX$$

COMO ESTIMAR A VARIÂNCIA?

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \underline{[i \neq j]} = n(n-1)$$

GOSTARIA DE DEFINIR $\hat{V}X$ DE TAL FORMA A OBTER

$$E(\hat{V}X) = VX$$

TOMAMOS

$$\hat{V}X = \frac{X_1^2 + \dots + X_n^2}{n-1} - \frac{(X_1 + \dots + X_n)^2}{n(n-1)}$$

$$\begin{aligned} E(\hat{V}X) &= \frac{1}{n-1} E \left(\sum X_i^2 - \frac{1}{n} \left(\sum X_i \right)^2 \right) \\ &= \frac{1}{n-1} \left(\sum E(X_i^2) - \frac{1}{n} \left(\sum_i \sum_j E(X_i X_j) \right) \right) \\ &= \frac{1}{n-1} \left(\sum E(X_i^2) - \frac{1}{n} \sum_i \sum_j \left(\underbrace{E(X_i X_j) [i=j]}_{E(X_i^2)} + \underbrace{E(X_i X_j) [i \neq j]}_{E(X_i)E(X_j)} \right) \right) \\ &= \frac{1}{n-1} \left(n E(X^2) - \frac{1}{n} \left(n E(X^2) + n(n-1) E(X)^2 \right) \right) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{n-1} \left(n E(X^2) - \frac{1}{n} \left(n E(X^2) + n(n-1) E(X)^2 \right) \right)$$

$$= \frac{1}{n-1} \left(n E(X^2) \left(1 - \frac{1}{n} \right) + (n-1) E(X)^2 \right)$$

$$= \frac{1}{\cancel{n-1}} \left(\cancel{n} E(X^2) \left(\frac{\cancel{n-1}}{\cancel{n}} \right) + \cancel{(n-1)} E(X)^2 \right)$$

$$= E(X^2) - E(X)^2 = V_X$$

$$1 - \frac{1}{n} = \frac{n-1}{n}$$

EX: Π_n = ESPAÇO DAS PERMUTAÇÕES DE $[n] = \{1, \dots, n\}$

NOTE QUE $|\Pi_n| = n!$

QUEREMOS ESTUDAR OS PONTOS FIXOS DE $\pi \in \Pi_n$

$$\begin{array}{ccc} \pi(1) & \pi(2) & \pi(3) \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \end{array} \quad \hookrightarrow u \in [n] \text{ t.q. } \pi(u) = u$$

EX: $\pi = (2, 1, 3)$. 2 e 1 NÃO PONTOS FIXOS, MAS 3 É.
 $\pi(1) = 2, \pi(2) = 1$ e $\pi(3) = 3$

CONSIDERE A VARIÁVEL ALEATÓRIA

$F_n(\pi)$ = O NÚMERO DE PONTOS FIXOS DE π .

EX: $F_3(213) = 1$, $F_3(123) = 3$ $F_3(312) = 0$

Qual o valor MÉDIO DE F_n ?

$$F_{n,k}(\pi) = [\pi(k) = k] = \begin{cases} 1 & \text{SE } k \text{ É PONTO FIXO DE } \pi \\ 0 & \text{CASO CONTRÁRIO} \end{cases}$$

$$F_n(\pi) = F_{n,1}(\pi) + \dots + F_{n,n}(\pi)$$

$$E(F_n) = E(F_{n,1}) + \dots + E(F_{n,n})$$

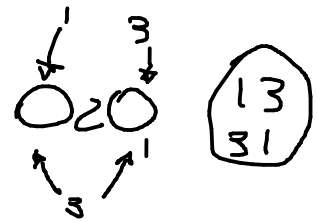
NOTE QUE $E(F_{n,i}) = P(F_{n,i} = 1) = P(i \text{ SER PONTO FIXO})$

$$E(F_n) = \sum_{i=1}^n E(F_{n,i}) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} = 1$$

$$\Pi_3 = \{123, 132, 213, 231, 312, 321\}$$

$$i=2$$

$$\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$



$$= \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}$$

PERMS FIXOS i QUE

Qual é o desvio padrão de F_m ?

$$E(F_m) = E(F_{m,1}) + \dots + E(F_{m,m})$$

$$F_m(\pi) = F_{m,1}(\pi) + \dots + F_{m,m}(\pi)$$

$$E(F_m^2) = E\left(\left(\sum_i F_{m,i}\right)^2\right) = E\left(\sum_i \sum_j F_{m,i} \cdot F_{m,j}\right)$$

$$X_{ij} = F_{m,i} \cdot F_{m,j}$$

$i \in \text{Ponto Fixo}$ $j \in \text{Ponto Fixo}$

$$V F_m = E(F_m^2) - E(F_m)^2 = \sum_i \sum_j E(F_{m,i} \cdot F_{m,j})$$

$$= 1$$

$$\text{logo } \sigma_{F_m} = 1$$

$$\mu \pm \sigma$$

$$1 \pm 1$$

$$= 2$$

$$= \underbrace{\sum_i E(F_{m,i})}_{E(F_m)} + \underbrace{\sum_i \sum_{j \neq i} E(F_{m,i} \cdot F_{m,j})}_{\substack{P(i \in J \text{ serem pontos} \\ \text{fixos ao mesmo} \\ \text{tempo}) \\ = \frac{(n-2)!}{n!} \\ = \frac{1}{n(n-1)}}}$$

$\frac{1}{n(n-1)} \cdot \sum_i \sum_{j \neq i} 1$
 $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n [i \neq j] = n(n-1)$
 $= 1$

FUNÇÕES GERADORAS DE PROBABILIDADE

• $X: \Omega \rightarrow \mathbb{N}$ VARIÁVEL ALEATÓRIA INTEIRA

• A FUNÇÃO GERADORA DE PROBABILIDADE (f.g.p) DE X É

$$G_X(z) = \sum_{k \geq 0} P(X=k) z^k$$

EX: SE $X: \Omega \rightarrow [n]$

É UMA VARIÁVEL UNIFORME, DIGAMOS $P(X=k) = \frac{1}{n}$

ENTÃO

$$G_X(z) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^n z^k = \frac{z^1}{n} + \frac{z^2}{n} + \dots + \frac{z^n}{n}$$

• OBSERVE QUE

$$G_X(z) = \sum_{\omega \in \Omega} P(\omega) \cdot z^{X(\omega)}$$

EX: X é o número de bolinhas da face do dado

$$G_X(z) = \frac{z}{6} + \frac{z^2}{6} + \dots + \frac{z^6}{6}$$

$$Y = \begin{cases} 1 & \text{se a face é ímpar} \\ 0 & \text{se a face é par} \end{cases}$$

$$G_Y(z) = \frac{1}{2} + \frac{z}{2} = \sum_{\substack{\text{FACES} \\ \text{DO DADO}}} P(\text{FACE}) \cdot z^{Y(\text{FACE})}$$

$$= \frac{1}{6} \cdot z^1 + \frac{1}{6} \cdot z^0 + \frac{1}{6} \cdot z^1 + \frac{1}{6} \cdot z^0 + \frac{1}{6} \cdot z^1 + \frac{1}{6} \cdot z^0$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{z}{2}$$

$$G_X(z) = \sum_{k \geq 0} P(X=k) z^k$$

OBSERVE QUE $G_X(1) = \sum_{k \geq 0} P(X=k) \cdot 1 = 1$

Por outro lado qualquer série de potências G $= G(1) = 1$ é a fgp de uma var. aleatória.

Com coeficientes
NÃO NEGATIVOS

MÉDIA E VARIÂNCIA

$$\bullet G_X'(z) = \sum_{k \geq 1} P(X=k) \cdot k \cdot z^{k-1}$$

$$\Rightarrow G_X'(1) = \sum_{k \geq 1} P(X=k) \cdot k = EX$$

$$\bullet E(X^2) = \sum_{k \geq 0} k^2 \cdot \frac{P(X^2=k^2)}{P(X=k)} = \left(\sum P(X=k) k(k-1) z^{k-2} + \sum P(X=k) k \cdot z^{k-1} \right) \Big|_{z=1}$$
$$(EX)^2 = G_X''(1) + G_X'(1)$$

$$E(Y) = \sum_{k^2} k^2 P(Y=k^2)$$

$$\bullet VX = E(X^2) - (EX)^2 = G_X''(1) + G_X'(1) - G_X'(1)^2$$

$$G_X(z) = \sum_{k \geq 0} P(X=k) z^k$$

$$\underline{k(k-1) + k = k^2}$$

EX: DISTRIBUIÇÃO UNIFORME: A VARIÁVEL TOMA CADA UM DOS VALORES
 EM $\{0, 1, \dots, n-1\}$ COM PROB. $1/n$

$$G_{u_n}(z) = \frac{1}{n} (1 + z + \dots + z^{n-1}) = \frac{1}{n} \frac{1 - z^n}{1 - z}, \quad n \geq 1$$

↳ CUIDADO COM $z=1$.

$$\bullet \text{ MÉDIA } (u_n) = u_n'(1) = \frac{1}{n} (1 + 2 + \dots + n-1) = \frac{n-1}{2}$$

$$\bullet u_n''(1) = \frac{1}{n} \sum_{k=2}^{n-1} k(k-1) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} k^2 - k = \frac{(n-1)(n-2)}{3}$$

$$\bullet V_{u_n} = G_{u_n}''(1) + G_{u_n}'(1) - G_{u_n}'(1)^2 = \frac{(n-1)(n-2)}{3} + \frac{(n-1)}{2} - \frac{(n-1)^2}{4}$$

$$= \frac{n^2 - 1}{12}$$

PRODUTO E SOMA

- O PRODUTO DE DUAS f.g.p.s CORRESPONDE À f.g.p. DA SOMA DAS VARIÁVEIS

SEJAM X E Y DUAS V.A. INDEP. INTEIRAS E POSITIVAS

$$P(X+Y=n) = P(X=0 \text{ e } Y=n) + P(X=1 \text{ e } Y=n-1) + \dots + P(X=n \text{ e } Y=0)$$

$$= \sum_{k=0}^n \underbrace{P(X=k \text{ e } Y=n-k)}_{\text{INDEPEN.}} = \sum_{k=0}^n \underbrace{P(X=k) P(Y=n-k)}_{\text{UMA CONVOLUÇÃO}}$$

$$G_{X+Y}(z) = \sum_{k \geq 0} P(X+Y=k) \cdot z^k$$

$$= \sum_{k \geq 0} \sum_{i \geq 0} P(X=i) \cdot z^i \cdot P(Y=k-i) \cdot z^{k-i} = \left(\sum_{i=0}^{\infty} P(X=i) \cdot z^i \right) \left(\sum_{k \geq 0} P(Y=k) \cdot z^k \right) = G_X(z) \cdot G_Y(z)$$

$$F \in G \text{ duas f.g?} \leadsto F(1) = G(1) = 1$$

$$H(z) = F(z) \cdot G(z) \quad \leadsto \quad H(z) = G_{X+Y}(z) = G_X(z) \cdot G_Y(z)$$

$$H(1) = F(1) \cdot G(1) = 1 \quad = F(z) \cdot G(z)$$

$$\begin{aligned} \text{Média}(H) &= H'(1) = F'(1) \cancel{G(1)} + \cancel{F(1)} \cdot G'(1) \\ &= F'(1) + G'(1) = \text{Média}(F) + \text{Média}(G) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Var}(H) &= H''(1) + H'(1) - H'(1)^2 \\ &= F''(1) + \cancel{2F'(1)G'(1)} + G''(1) + F'(1) + G'(1) - F'(1)^2 - \cancel{2F'(1)G'(1)} - G'(1)^2 \\ &= \text{Var}(F) + \text{Var}(G) \end{aligned}$$

$$H''(z) = F''(z) \cdot G(z) + 2F'(z)G'(z) + F(z) \cdot G''(z)$$

$$H''(1) = F''(1) + 2F'(1)G'(1) + G''(1)$$

CARA OU COROA

HEADS

H

TAILS

T

- JOGAR MOEDA COM PROB p DE SAIR CARA, E q DE SAIR COROA

$$p + q = 1$$

~ $p = q = \frac{1}{2}$ MOEDA IMPARCIAL OU HONESTA

~ $p \neq q$ MOEDA TENDENCIOSA

- VAMOS FOCAR NO NÚMERO DE CARAS

• A fgp DO #CARAS É $H(z) = q + pz$

- JOGANDO n VEZES :

É A PROBABILIDADE
DE SAIR k CARAS

} DISTRIBUIÇÃO
BINOMIAL

$$H(z)^n = (q + pz)^n = \sum_{k \geq 0} \binom{n}{k} q^{n-k} \cdot p^k z^k$$

PERGUNTA: SUPONHA QUE JOGAMOS A MOEDA ATÉ CAIR CARA
PELA PRIMEIRA VEZ. QUAL É A PROBABILIDADE DE PRECISARMOS
JOGAR EXATAMENTE K MOEDAS?

EX: $K=1$ COM PROB. $= p$

$K=2$ COM PROB. $= q \cdot p$

$\vdots$

K COM PROB. $= q^{K-1} \cdot p$

PG. COM RAZÃO qz

• A fgp é $pz + qpz^2 + q^2pz^3 + \dots = pz \left(1 + qz + q^2z^2 + \dots \right)$

$$= \frac{pz}{1 - qz} = G(z)$$

REPETINDO ATÉ DAR n CARAS, OBTÉMOS

$$G(z) = \left(\frac{pz}{1-qz} \right)^n = p^n z^n \cdot \sum_{\substack{k \geq 0 \\ k \text{ pink}}} \binom{n+k-1}{k} (qz)^k = \sum_{\substack{k \geq n \\ k \text{ pink}}} \binom{k-1}{k-n} p^n q^{k-n} z^k$$

$= \frac{1}{z^n} f_{qP}$ DA DISTRIBUIÇÃO
BIN. NEGATIVA.

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + \dots$$

$$\left(\frac{1}{1-z} \right)^2 = (1 + z + \dots) (1 + z + \dots) = 1 \cdot z^0 + 2z^1 + 3z^2 + 4z^3 + 5z^4 + \dots$$

$$\left(\frac{1}{1-z} \right)^3 = (1 + z + z^2 + \dots) (1 + 2z + 3z^2 + \dots) = z^0 + 3z^1 + 6z^2 + 10z^3 + \dots$$

• A FUNÇÃO GERADORA DA DISTRIBUIÇÃO BINOMIAL NEGATIVA

$$\left(\frac{p}{1-qz} \right)^n = \sum_k \binom{n+k-1}{k} p^n q^k z^k$$

1) ESPAÇO DE PROBABILIDADE

$$\left(\frac{pz}{1-qz}\right)^n = p^n z^n \cdot \sum_{k \geq 0} \binom{n+k-1}{k} (qz)^k = \sum_k \binom{n-1}{k-n} p^n q^{k-n} \cdot \underline{z^k}$$

• DIFERENTE DO QUE VIMOS ANTES: ESTE ESPAÇO É INFINITO.

• CADA ELEMENTO É UMA SEQUÊNCIA FINITA DE CARAS E/OU COROAS.

CONTENDO EXATAMENTE n CARAS E TERMINA COM CARA.

EX: $n=3$

$$P(\underbrace{TTH THTH}_{7}) = q^4 p^3$$

$$\underbrace{\overbrace{H H H}^7}_6$$

$$P(\text{PRECISAR DE EXATAMENTE 7 MOEDAS}) = \binom{6}{2} q^4 p^3$$

• A PROB. DE SAIR UMA SEQ. FIXA DE COMP. k É $p^n q^{k-n} \binom{n}{a} = \binom{n}{n-a}$

• LOGO, A PROB. DE SAIR UMA SEQ. QUALQUER DE COMP k É $\binom{k-1}{n-1} p^n q^{k-n}$

$$\left(\frac{pz}{1-qz}\right)^n = a_0 z^0 + a_1 z^1 + \dots$$

$$a_k = \# \text{ SEQ DE COMP. } k \text{ COM } n \text{ CARAS E ACABANDO EM CARA} = \binom{k-1}{n-1} \xrightarrow{\text{SÍMETRIA}} \binom{k-1}{k-n}$$

• Qual é número esperado de vezes que vamos jogar a moeda?

$$G(z)^n = \left(\frac{pz}{1-qz} \right)^n \leadsto G(z)^{n+1} = n \left(\frac{pz}{1-qz} \right)^{n-1} \cdot \frac{p}{(1-qz)^2}$$

$$G(z) = \frac{pz}{1-qz} = pz + qpz^2 + q^2pz^3 + \dots = \sum_{k \geq 1} q^{k-1} pz^k \quad G(1)^{n+1} = \frac{n p^n}{(1-q)^{n+1}}$$

$$\Omega = \left\{ \underset{p}{H}, \underset{q}{TH}, \underset{q^2}{TTH}, \underset{q^3}{TTTH}, \dots \right\}$$

$$G'(z) = \sum_{k \geq 1} k q^{k-1} p \quad p=q=1/2$$

$$G'(1) = 2n$$

$X = \# \text{ comp. da sequência}$

$$EX = 1 \cdot p + 2qp + 3q^2p + 4q^3p + \dots = \sum k q^{k-1} p$$

$$G'(z) = \frac{p(1-qz) + qpz}{(1-qz)^2} = \frac{p}{(1-qz)^2}$$

$$G'(1) = \frac{p}{(1-q)^2}$$

$$p=q=1/2$$

$$G_{1/2}(1) = \frac{1/2}{(1/2)^2} = 2$$

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{1}{1-qz} \right) = \frac{-q}{(1-qz)^2}$$

EX: QUANTAS VEZES TEMOS QUE JOGAR A MOEDA PARA
OBTER CARA DUAS VEZES SEGUIDAS?

ESPAÇO DE PROBABILIDADE

$$\Omega = \{ \underline{HH}, \underline{THH}, \underline{TTHH}, \underline{HTHH}, \dots \}$$

$$\text{EX: } P(\underline{HTTHH}) = q^2 p^3$$

CONSIDERE O SOMATÓRIO

$$S = \underline{HH} + \underline{THH} + \underline{TTHH} + \underline{HTHH} + \dots \rightsquigarrow p^2$$

SE TROCARMOS H POR pz , E T POR qz , O COEFICIENTE DE
 z^k É A PROBABILIDADE DE OBTER COMPRIMENTO k .

$$S = HH + THH + \underbrace{TTHH} + HTHH + \dots$$

$$1 + qz + (pq + q^2) + (2pq^2 + q^3)$$

NOTE QUE OS ETS DE Ω SÃO DA FORMA

$$\underbrace{(T+HT)^n HH}$$

HTT
THT
TTT

SE $R = \sum_{k \geq 0} \underbrace{(T+HT)^k}_w$, ENTÃO $S = RHH$

$$= 1 + w + w^2 + \dots$$

$$= \frac{1}{1-w} = \frac{1}{1-T-HT}$$

$$\frac{1}{1-qz-pqz^2}$$

H POR pz , E T POR qz , 0

LOGO, A FUNÇÃO GERADORA DE $S = \frac{HH}{1-T-HT} = \frac{p^2 z^2}{1-qz-pqz^2}$

QUANDO $p=q=\frac{1}{2}$, OBTENOS $\mu = 6$ E $\sigma^2 = 22$

NOTAÇÃO ASSINTÓTICA

- NEM SEMPRE CONSEGUIMOS DAR UMA FÓRMULA EXATA PARA RESPONDER UM PROBLEMA.

EX: NÃO SE CONHECE FÓRMULA FECHADA PARA

$$S_n = \sum_{k=0}^n \binom{3n}{k}$$

MAS SABEMOS DIZER QUE $S_n \rightarrow 2 \binom{3n}{n}$ QUANDO $n \rightarrow \infty$

- DIZEMOS QUE S_n É ASSINTOTICAMENTE IGUAL A $2 \binom{3n}{n}$
- PODEMOS DAR UMA INFORMAÇÃO MAIS DETALHADA

$$S_n = \binom{3n}{n} \left(2 - \frac{4}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right)$$

↳ ERRO DA ORDEM DE $\frac{1}{n^2}$

EX: O QUE É MAIOR, S_m OU F_{4m} ?

$$S_2 = 22 > 21 = F_8$$

→ MAS F_{4m} TORNA-SE MAIOR, POIS

$$F_{4m} \sim \frac{(6.8541)^m}{\sqrt{5}} \quad \text{E} \quad S_m = \sqrt{\frac{3}{5m}} (6.75)^m \left(1 - \frac{151}{72m} + O\left(\frac{1}{m^2}\right) \right)$$

HIERARQUIA

• DADAS DUAS FUNÇÕES $f, g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, DIZEMOS QUE $f < g$ SE

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$$

OBS: $<$ É UMA RELAÇÃO TRANSITIVA: SE $f < g$ E $g < h$, ENTÃO $f < h$

EX: $n < n^2$

$$n^\alpha < n^\beta \text{ SE } \alpha < \beta \text{ COM } \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^\alpha}{n^\beta} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{\beta-\alpha}} = 0$$

EX: $1 < \log \log n < \log n < n^\epsilon < n^c < n^{\log n} < c^n < n^n < c^c$

QUANDO $0 < \epsilon < 1 < c$

OBS: EXCETO 1, TODAS ESSAS FUNÇÕES TENDEM A ∞ . MAS QUÃO RÁPIDO?

PROP: $\log_{10} n \prec n^\varepsilon$ PARA QUALQUER $0 < \varepsilon < 1$

PROVA: TOMO K TAL QUE $\varepsilon \geq \frac{1}{10^K}$ E SEJA $n = 10^{10^{2K}}$

$$\text{TEMOS } \log n = 10^{2K} \quad \varepsilon$$

$$n^\varepsilon = \left(10^{10^{2K}}\right)^\varepsilon \geq 10^{\frac{10^{2K}}{10^K}} = 10^{10^K}$$

$$\text{MAS ENTÃO } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log n}{n^\varepsilon} \leq \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{10^{2K}}{10^{10^K}} = 0$$



• FUNÇÕES QUE TENDEM A ZERO:

$$f \prec g \quad \text{SE} \quad \frac{1}{g} < \frac{1}{f}$$

Prop: $n^{1-\varepsilon} < \pi(n) < n$

Prova: SABEMOS QUE $\pi(n) \sim \frac{n}{\log n}$

Como $1 < \log n < n^\varepsilon$, TEMOS $\frac{1}{n^\varepsilon} < \frac{1}{\log n} < 1$

MULTIPLICANDO TODO POR n , OBTENEMOS O RESULTADO

OBS: $f \asymp g \iff \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f}{g} = 0 \iff \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n f}{n g} = 0 \iff n f \asymp n g.$

Ex: $e^{\sqrt{\ln n}} \leq e^{\ln n} = n$

TEMOS QUE $e^{f(n)} < e^{g(n)} \iff \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{f(n)}}{e^{g(n)}} = 0$

$\iff \lim_{n \rightarrow \infty} e^{f(n) - g(n)} = 0$

$\iff \lim_{n \rightarrow \infty} (f(n) - g(n)) = -\infty$

logo $f < g \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f}{g} = 0 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} f - g = -\infty$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{f}{g} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f - g}{g} = -1$

$\lim_{n \rightarrow \infty} f - g = \lim_{n \rightarrow \infty} g \left(\frac{f - g}{g} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} -g = -\infty$

$\implies e^f < e^g$

Como $1 \prec \log n \prec n^{1/2} \prec \varepsilon n$, temos

$$1 \prec \log \log n \prec \sqrt{\log n} \prec \varepsilon \log n$$

Assim,

$$\log n = e^{\log \log n} \prec e^{\sqrt{\log n}} \prec e^{\varepsilon \log n} = n^\varepsilon$$

- AS FUNÇÕES f E g TÊM A MESMA TAXA DE CRESCIMENTO SE EXISTEM C E m_0 T.q.

$$|f(n)| \leq C |g(n)| \quad \text{E} \quad |g(n)| \leq C |f(n)| \quad \forall n \geq m_0$$

NOTAÇÃO: $f \asymp g$

EX: $n^\alpha \in a \cdot n^\alpha$

- DIZEMOS QUE f É ASSINTOTICAMENTE IGUAL A g SE

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 1$$

A NOTAÇÃO O

- Dizemos que $f(n) = O(g(n))$ se existem C e n_0 t.q.

$$|f(n)| \leq C|g(n)| \quad \forall n \geq n_0$$

→ No meio de uma fórmula, $O(g(n))$ representa qualquer função com esta propriedade

EX: $\square_m = \sum_{k=1}^m k^2 = \frac{1}{3}m^3 + \frac{1}{2}m^2 + \frac{1}{6}m$

TEMOS QUE $\square_m = O(m^3)$

Pois, se $m \geq 1$, TEMOS $m \leq m^2 \leq m^3$ e, PORTANTO

$$\square_m = \frac{1}{3}m^3 + \frac{1}{2}m^2 + \frac{1}{6}m \leq \frac{1}{3}m^3 + \frac{1}{2}m^3 + \frac{1}{6}m^3 = m^3$$

Logo, $\square_m \leq m^3 \quad \forall m$

$C=1$ e $m_0=1$.

TAMBÉM PODEMOS ESCREVER $\square_m = \frac{1}{3}m^3 + O(m^2)$

OBS: O NÃO PODE SER USADA DO LADO ESQUERDO DAS EQUAÇÕES

EX: $m = O(m^2)$

• $O(g(n))$ REPRESENTA UMA FAMÍLIA DE FUNÇÕES

→ TODAS AS FUNÇÕES f / AS QUAIS EXISTEM C E m_0 T. q.

$$|f(n)| \leq C |g(n)| \quad \forall n \geq m_0$$

→ O IDEAL É DIZER QUE $f \in O(g)$

→ FALAMOS " f É OZÃO DE g "

→ MUITAS VEZES USAMOS O PARA DENOTAR O CRESCIMENTO EXATO DE UMA FUNÇÃO

→ NADA IMPEDIRIA QUE $f(n) = O(n^2)$ SEJA $O(n)$

EX: COMO $n \leq n^2$, TEMOS $n = O(n^2)$, MAS TAMBÉM $n = O(n)$.

DIZEMOS QUE $f = \Omega(g)$ SE EXISTEM $C \in \mathbb{N}_0$ T.q.

$$|f(n)| \geq C |g(n)| \quad \forall n \geq n_0$$

• NOTE QUE $f = O(g)$ SE E SOMENTE SE $g = \Omega(f)$

DIZEMOS $f = \Theta(g)$ SE $f = O(g)$ E $f = \Omega(g)$

EM PARTICULAR $f = \Theta(g) \Leftrightarrow f \asymp g$

$$\text{EX: } f(n) = n^k \quad \in \quad g(n) = 72n^k \Rightarrow f = \theta(g)$$

$$g'(n) = 72n^k + 68n^{k-1} + 35 \leq \frac{(72+68+35)n^k}{C_2}$$

$$g'(n) \geq \frac{72n^k}{C_1}$$

$$g'(n) = \theta(f)$$

$$\text{OBS: } f = \theta(g) \Leftrightarrow g = \theta(f)$$

$$f = O(g) \text{ NÃO DIZ NADA SOBRE } g = O(f)$$

$$\text{EX } n \in O(n^2) \text{ MAS } n^2 \notin O(n)$$

EX: $\log n^2 = 2 \log n = O(\log n)$

MANIPULANDO O

EX: $n^m = O(n^{m'}) \quad \text{se } m \leq m'$

$$O(f) + O(g) = O(f+g)$$

$$\leadsto \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n = \underbrace{O(n^3) + O(n^2) + O(n)}_{\text{}} = \underline{O(n^3)}$$

$$\underbrace{O(n) + \dots + O(n)}_{n \text{ vezes}} = O(n^2)$$

NOTAÇÃO O

• Dizemos que $f = o(g)$ se para todo $\varepsilon > 0$ existe $m_0 = m_0(\varepsilon)$

↗ "f é o zinho de g"

T.q.

$$|f(n)| \leq \varepsilon |g(n)| \quad \forall n \geq m_0$$

↪ MESMA COISA QUE $f \sim g : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$

EX: $n = o(n^2)$

$\Downarrow$
 $<$

$$n = O(n^2)$$

$\Downarrow$
 $\leq$

ALGUMAS REGRAS

$$\bullet f = O(f)$$

$$\bullet c O(f) = O(f) \quad \text{SE } c \text{ É CONSTANTE}$$

$$\bullet O(O(f)) = O(f)$$

$$\bullet O(f) \cdot O(g) = O(f \cdot g)$$

$$\bullet O(fg) = f \cdot O(g)$$

APROXIMAÇÕES

$$\text{ERRO ABSOLUTO} : f(n) + O(g)$$

$$\text{ERRO RELATIVO} : f(n) (1 + O(g)) \quad \rightarrow f(n) + f(n)g(n)$$