

COEFICIENTES BINOMIAIS

$\binom{r}{k}$ = NÚMERO DE SUBCONJUNTOS DE TAMANHO k
DE UM CONJUNTO DE TAMANHO r

→ ÍNDICE SUPERIOR

→ ÍNDICE INFERIOR

$$= \# \left\{ S \subseteq [r] : |S| = k \right\}$$

$\downarrow$
 $= \{1, \dots, r\}$

$$= \frac{r^k}{k!} = \frac{r!}{k!(r-k)!}$$

• LEMBRE-SE QUE $r!$ É O NÚMERO DE ORDENAÇÕES DE UM CONJ. COM r ELEMENTOS

$$\bullet r^k = \frac{r!}{(r-k)!} = r \cdot (r-1) \cdot (r-2) \cdot \dots \cdot (r-k+1)$$

É O NÚMERO DE SEQUÊNCIAS DE COMPRIMENTO k EM UM CONJ. COM r ELEMENTOS.

→ É ÚTIL QUE $\binom{r}{k}$ SEJA DEFINIDO PARA TODO r REAL.

$$\binom{r}{k} = \begin{cases} \frac{r^k}{k!} & \text{SE } k \geq 0 \text{ INTEIRO} \\ 0 & \text{SE } k < 0 \end{cases}$$

→ É UM **POLINÔMIO** DE GRAU k EM r

$$a_k \cdot r^k + a_{k-1} \cdot r^{k-1} + \dots + a_0 \cdot r^0$$

TRIÂNGULO DE PASCAL

n	$\binom{n}{0}$	$\binom{n}{1}$	$\binom{n}{2}$	$\binom{n}{3}$	$\binom{n}{4}$	$\binom{n}{5}$
0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	6	4	1	
5	1	5	10	10	5	1

OBS: $\binom{r}{0} = 1$, $\binom{r}{1} = r$, $\binom{r}{2} = \frac{r(r-1)}{2}$

SIMETRIA

→ AS LINHAS SÃO SIMÉTRICAS:

$$\binom{r}{k} = \binom{r}{r-k} \quad \begin{array}{l} \nearrow \text{FORMAS DE EXCLUIR } r-k \text{ ITENS} \\ // \\ \searrow \text{FORMAS DE ESCOLHER } k \text{ ITENS} \end{array}$$

→ QUANDO $r \geq 0$, r INTEIRO

ABSORÇÃO.

$$\binom{r}{k} = \frac{r}{k} \binom{r-1}{k-1}$$

$\forall k \neq 0$

ALTERNATIVO

$$k \binom{r}{k} = r \binom{r-1}{k-1}$$

PROP: $(r-k) \binom{r}{k} = r \binom{r-1}{k}$ k INTEIRO

PROVA: $(r-k) \binom{r}{k} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{SIMETRIA}}}{=} (r-k) \binom{r}{r-k} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{ABSORÇÃO}}}{=} r \binom{r-1}{r-k-1} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{SIMETRIA}}}{=} r \binom{r-1}{k}$

OBS: ISSO VALE PARA TODO r !

ARGUMENTO POLINOMIAL

→ OS DOIS LADOS DA IGUALDADE SÃO POLINÔMIOS EM r COM GRAU $k+1$.

→ A DIFERENÇA ENTRE OS LADOS TAMBÉM É UM POLINÔMIO DE GRAU NO MÁX $k+1$ E, PORTANTO, POSSUI NO MÁXIMO $k+1$ RAÍZES OU É O POLINÔMIO NULO.

→ COMO TODO INTEIRO r É RAÍZ, ENTÃO A DIFERENÇA É O POLINÔMIO NULO.

FÓRMULA DA ADIÇÃO:

$$\binom{r}{k} = \binom{r-1}{k} + \binom{r-1}{k-1} \quad k \text{ INTEIRO}$$

↳ ARGUMENTO DO OVO PODRE.

OBS: $\binom{r}{k} = \binom{r-1}{k} + \binom{r-1}{k-1}$ — COEFICIENTE COM MENOR ÍNDICE INFERIOR

$$= \binom{r-1}{k} + \binom{r-2}{k-1} + \binom{r-2}{k-2}$$

⋮

→ $\sum_{k=0}^m \binom{r+k}{k} = \binom{r+m+1}{m}$ m INTEIRO

OU SE EXPANDIRMOS O COEFICIENTE COM MAIOR ÍNDICE INFERIOR

$$\leadsto \sum_{0 \leq k \leq m} \binom{k}{m} = \binom{m+1}{m+1} \quad m, m \text{ INTEIROS, } m, m \geq 0$$

COEFICIENTES BINOMIAIS RECEBEM ESTE NOME POR CAUSA DO TEOREMA BINOMIAL

$$(x+y)^0 = 1 x^0 y^0$$

$$(x+y)^1 = 1 x^1 y^0 + 1 x^0 y^1$$

$$(x+y)^2 = 1 x^2 y^0 + 2 x^1 y^1 + 1 x^0 y^2$$

$$(x+y)^3 = 1 x^3 y^0 + 3 x^2 y^1 + 3 x^1 y^2 + 1 x^0 y^3$$

$$(x+y)^4 = 1 x^4 y^0 + 4 x^3 y^1 + 6 x^2 y^2 + 4 x^1 y^3 + 1 x^0 y^4$$

$$(x+y)^m = \underbrace{(x+y) \cdot (x+y) \cdot \dots \cdot (x+y)}_{m \text{ VEZES}}$$

$\leadsto$ O COEFICIENTE DE $x^j y^{m-j}$ É O NÚMERO DE FORMAS DE ESCOLHER j FATORES $= \binom{m}{j}$

TEOREMA BINOMIAL: $(x+y)^r = \sum_k \binom{r}{k} x^k y^{r-k}$ r INTEIRO, $r \geq 0$

COROLÁRIO: $2^r = \sum_k \binom{r}{k} = \binom{r}{0} + \binom{r}{1} + \dots + \binom{r}{r}$ $\hookrightarrow \text{ou } |x/y| < 1$
CASO COMPLEXO.

$$0^r = \sum_k \binom{r}{k} (-1)^k = \binom{r}{0} - \binom{r}{1} + \dots + (-1)^r \binom{r}{r}$$

REGRA ÚTI: $\binom{r}{m} \binom{m}{k} = \binom{r}{k} \binom{r-k}{m-k}$ m, k INTEIROS

$$= \frac{r!}{m!(r-m)!} \cdot \frac{m!}{k!(m-k)!} = \frac{r!}{k!(r-k)!} \cdot \frac{(r-k)!}{(m-k)!(r-m)!}$$

PODEMOS ESCREVER

$$\binom{r}{k} = \frac{r!}{k!(r-k)!} \quad \text{COMO} \quad \frac{(a+b)!}{a!b!}, \quad \text{ONDE } a=k \text{ E } b=r-k$$

ANALOGAMENTE, PODEMOS ESCREVER

COEFICIENTE TRINOMIAL

$$\frac{r!}{k!(r-k)!} = \frac{(a+b+c)!}{a!b!c!}$$

TEOREMA TRINOMIAL

$$\begin{aligned} (x+y+z)^n &= \sum_{\substack{0 \leq a,b,c \leq n \\ a+b+c=n}} \frac{(a+b+c)!}{a!b!c!} x^a y^b z^c \\ &= \sum_{\substack{0 \leq a,b,c \leq n \\ a+b+c=n}} \binom{a+b+c}{b+c} \binom{b+c}{c} x^a y^b z^c \end{aligned}$$

$\Rightarrow \binom{r}{m} \binom{m}{k}$ É UM COEFICIENTE TRINOMIAL.

ESCREVEMOS $\binom{a+b+c}{a,b,c} = \frac{(a+b+c)!}{a!b!c!}$

GENERALIZANDO: $\binom{a_1+a_2+\dots+a_m}{a_1, a_2, \dots, a_m} = \frac{(a_1+\dots+a_m)!}{a_1! \dots a_m!}$

$$= \binom{a_1+\dots+a_m}{a_2+\dots+a_m} \dots \binom{a_{m-1}+a_m}{a_m}$$

CONVOLUÇÃO DE VANDERMONDE

$$\sum_k \binom{r}{m+k} \binom{s}{n-k} = \binom{r+s}{m+n}, \quad m, n \in \mathbb{N}$$

↳ TODOS OS INTEIROS

DE QUANTAS FORMAS PODEMOS ESCOLHER $m+k$ HOMENS DE UM CONS. DE r HOMENS, E COMPLETAR COM $n-k$ MULHERES

DE QUANTAS FORMAS PODEMOS

ESCOLHER $m+n$ PESSOAS ENTRE r HOMENS E s MULHERES

PROPOSIÇÃO:

$$\sum_k \binom{l}{m+k} \binom{s+k}{n} (-1)^k = (-1)^{l+m} \binom{s-m}{n-l} \quad l \geq 0, m, n \geq 0$$

PROVA: INDUÇÃO EM l .

BASE: $l=0$. TODOS OS TERMOS SE ANULAM, EXCETO QUANDO $k=-m$ QUE NOS DÁ EXATAMENTE $\binom{s-m}{n} (-1)^{-m} = \binom{s-m}{n} (-1)^m$

$$\text{H.I.: } \sum_k \binom{l'}{m+k} \binom{s+k}{n} (-1)^k = (-1)^{l'+m} \binom{s-m}{n-l'}$$

SEMPRE QUE $l' \leq l$.

PASSO INDUTIVO: USANDO A FÓRMULA DE ADIÇÃO TEMOS

$$\binom{l}{m+k} = \binom{l-1}{m+k} + \binom{l-1}{m+k-1}$$

VAMOS USAR
 $l' = l-1$

NOSSA SOMA É QUEBRADA EM DUAS

$$\sum_k \binom{l}{m+k} \binom{s+k}{n} (-1)^k = \sum_k \binom{l-1}{m+k} \binom{s+k}{n} (-1)^k + \sum_k \binom{l-1}{m+k-1} \binom{s+k}{n} (-1)^k$$

PELA H.I.

$$= (-1)^{l-1+m} \binom{s-m}{n-l+1} + (-1)^{l-1+m-1} \binom{s-m+1}{n-l+1}$$

$$= (-1)^{l+m} \left(\binom{s-m+1}{n-l+1} - \binom{s-m}{n-l+1} \right)$$

PELA FÓRMULA
DE ADIÇÃO

$$= (-1)^{l+m} \binom{s-m}{n-l}$$

□

PROBLEMA. ENCONTRAR UMA FÓRMULA FECHADA PARA

$$\sum_{k=0}^m \binom{m}{k} / \binom{m}{k}$$

$$\binom{r}{m} \binom{m}{k} = \binom{r}{k} \binom{r-k}{m-k}$$

SOLUÇÃO: USAMOS A REGRA ÚTI DA PÁG 4, E OBTÊMOS

$$\binom{m}{m} \binom{m}{k} = \binom{m}{k} \binom{m-k}{m-k}$$

$$\Rightarrow \binom{m}{k} / \binom{m}{k} = \binom{m-k}{m-k} / \binom{m}{m}$$

ASSIM, TEMOS

$$\sum_{k=0}^m \binom{m}{k} / \binom{m}{k} = \sum_{k=0}^m \binom{m-k}{m-k} / \binom{m}{m}$$

↳ FICA PARECIDO, MAS O K
ESTÁ APENAS NO NUMERADOR

$$= \frac{1}{\binom{m}{m}} \sum_{k=0}^m \binom{m-k}{m-k}$$

↳ PARECE COM O
SOMATÓRIO DA PÁG. 3

$$= \frac{1}{\binom{m}{m}} \cdot \sum_{r=m-k=0}^m \binom{m-m+r}{r}$$

$$\sum_{k \leq n} \binom{r+k}{k} = \binom{r+m+1}{m}$$

DE TRÁS PARA
FRENTE

$$= \frac{1}{\binom{m}{m}} \cdot \binom{m-m+m+1}{m}$$

$$= \frac{1}{\binom{m}{m}} \binom{m+1}{m} = \frac{m+1}{m+1-m}$$

MERGE SORT

$$T = \underbrace{\sum_{k=0}^m k \binom{m-k-1}{m-n-1}}_S \underbrace{\binom{m}{n}}_{\text{NÃO DEPENDE DE } K}, \quad m > n \geq 0 \quad \text{INTEIROS}$$

IDEIA: USAR A REGRA DE ABSORÇÃO

$$\binom{r}{k} = \frac{r}{k} \binom{r-1}{k-1}$$

MAS NESTE CASO PRECISAMOS QUE $r = m - k$, MAS TEMOS $r = k$

~> VAMOS SUBSTITUIR k POR $m - (m - k)$

$$S = - \sum_{k=0}^m (m-k) \binom{m-k-1}{m-n-1} + \sum_{k=0}^m m \binom{m-k-1}{m-n-1}$$

$$= - \sum_{k=0}^m (m-n) \binom{m-k}{m-n} + m \sum_{k=0}^m \binom{m-k-1}{m-n-1}$$

JÁ SABEMOS RESOLVER ESTAS SOMAS (PÁG 4)

$$\sum_{0 \leq k \leq n} \binom{k}{m} = \binom{m+1}{m+1}$$

$$\sum_{0 \leq k \leq m} \binom{m-k}{m-n} = \sum_{0 \leq m-k \leq m} \binom{m-(m-k)}{m-n}$$

$$= \sum_{m-n \leq k \leq m} \binom{k}{m-n}$$

POISQUE $\binom{k}{m-n} = 0$ QUANDO $k < m-n$

$$= \sum_{0 \leq k \leq m} \binom{k}{m-n} = \binom{m+1}{m-n+1}$$

OUTRO SOMATÓRIO É ANALOGO, COM $m-1$ NO LUGAR DE m
OBTENEMOS $\binom{m}{m-n}$

$$\text{FINALMENTE, } S = - (m-n) \binom{m+1}{m-n+1} + m \binom{m}{m-n}$$

$$= \left(m - (m-n) \cdot \frac{m+1}{m-n+1} \right) \binom{m}{m-n}$$

$$= \frac{n}{m-n+1} \binom{m}{m-n}$$

PROBLEMA: ENCONTRAR UMA FÓRMULA FECHADA PARA

$$S = \sum_{k \geq 0} \binom{m+k}{2k} \binom{2k}{k} \frac{(-1)^k}{k+1}$$

SOLUÇÃO: REGRA ÚTIL:

↳ TEM k EM TODO LUGAR

OBJETIVO: ELIMINAR OS k 'S

ÚTIL

$$\binom{r}{m} \binom{m}{k} = \binom{r}{k} \binom{r-k}{m-k}$$

$$\binom{m+k}{2k} \binom{2k}{k} = \binom{m+k}{k} \binom{m}{k}$$

ABSORÇÃO

$$\binom{r}{k} = \frac{r}{k} \binom{r-1}{k-1}$$

AGORA ABSORVEMOS O $\frac{1}{k+1}$: $\leftarrow$ SE $k \neq -1$

$$\frac{1}{k+1} \cdot \binom{m}{k} = \frac{1}{m+1} \binom{m+1}{k+1}$$

SIMETRIA

$$\binom{r}{k} = \binom{r}{r-k}$$

USANDO A SIMETRIA:

$$\binom{m+k}{k} = \binom{m+k}{m} \leftarrow \text{SE } k \geq 0$$

ASSIM TEMOS

$$S = \frac{1}{m+1} \sum_{k \geq 0} \binom{m+k}{m} \binom{m+1}{k+1} (-1)^k$$

PROP. PÁG 6 com

$$m=1, l=m+1$$

$$\Leftrightarrow n=5$$

PROP. PÁG. 6

$$\sum_k \binom{l}{m+k} \binom{s+k}{n} (-1)^k = (-1)^{l+m} \binom{s-m}{m-l}$$

$$= \frac{1}{m+1} (-1)^{m+2} \binom{m-1}{-1} = 0$$

ONDE ESTÁ O ERRO?

TRUQUES

$$\cdot r^{\frac{K}{2}} \left(r - \frac{1}{2}\right)^{\frac{K}{2}} = \frac{(2r)^{\frac{2K}{2}}}{2^{2K}}, \quad K \geq 0 \text{ INTEIRO}$$

$$\begin{aligned} &= r \left(r - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(r - 1\right) \cdot \left(r - \frac{3}{2}\right) \cdot \dots \cdot \left(r - K + 1\right) \cdot \left(r - K + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2^{2K}} \cdot (2r)(2r-1) \dots (2r-2K+1) \\ &= \frac{1}{2^{2K}} \cdot (2r)^{\frac{2K}{2}} \end{aligned}$$

DIVIDINDO OS DOIS LADOS POR $(K!)^2$ TEMOS

$$\binom{r}{K} \binom{r - \frac{1}{2}}{K} = \frac{(2r)^{\frac{2K}{2}}}{2^{2K}} \quad \text{USANDO } (2r)^{\frac{2K}{2}} = \frac{(2r)^{\frac{2K}{2}} (2K)^{\frac{K}{2}}}{(2K)^{\frac{K}{2}}}$$

$$\in (2K)^{\frac{K}{2}} \cdot K! = (2K)^{\frac{2K}{2}}$$

Tomando $K=r=n$, obtemos $\binom{n - \frac{1}{2}}{n} = \frac{(2n)^{\frac{2n}{2}}}{2^{2n}}$

ou seja: $\left(n - \frac{1}{2}\right)! = \left(n - \frac{1}{2}\right) \left(n - \frac{3}{2}\right) \dots \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2^n} (2n-1)(2n-3) \dots \left(\frac{1}{2}\right)$

$$\begin{aligned} &= \frac{(-1)^n}{2^n} \underset{1}{(-1)} \underset{2}{(-3)} \underset{3}{(-5)} \dots \underset{n}{(-2n+1)} \\ &= (-1)^{n-1} \left(-\frac{1}{2}\right) \left(-\frac{3}{2}\right) \dots \left(-n + \frac{1}{2}\right) \\ &= (-1)^{n-1} \left(-\frac{1}{2}\right)^n \end{aligned}$$

Logo $\binom{n - \frac{1}{2}}{n} = (-1)^n \binom{-\frac{1}{2}}{n}$

EX: $\binom{4 - \frac{1}{2}}{4} = \frac{(4 - \frac{1}{2}) \cdot (3 - \frac{1}{2}) \cdot (2 - \frac{1}{2}) \cdot (1 - \frac{1}{2})}{4!} = \frac{(-\frac{1}{2}) \cdot (-\frac{3}{2}) \cdot (-\frac{5}{2}) \cdot (-\frac{7}{2})}{4!} = \binom{-\frac{1}{2}}{4}$

Voltando: $\binom{-\frac{1}{2}}{n} = (-1)^n \binom{n - \frac{1}{2}}{n} = \left(\frac{-1}{4}\right)^{\frac{n}{2}} \binom{2n}{n}$

$$\text{EX: } \binom{-1/2}{4} = \frac{(-1/2)(-3/2)(-5/2)(-7/2)}{4!} = \left(\frac{-1}{2}\right)^4 \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$$

$$= \left(\frac{-1}{4}\right)^4 \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \overbrace{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}^{\substack{\text{Por isso} \\ \text{foi de } 2 \cdot 1/4}}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \overbrace{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}^{\substack{\text{foi de } 2 \cdot 1/4}}}} = \left(\frac{-1}{4}\right)^4 \binom{8}{4}$$

COMO CONSEQUÊNCIA DISSO, TEMOS

$$\binom{-1/2}{k} \binom{-1/2}{m-k} = \left(\frac{-1}{4}\right)^k \binom{2k}{k} \left(\frac{-1}{4}\right)^{m-k} \binom{2(m-k)}{m-k} = \frac{(-1)^m}{4^m} \binom{2k}{k} \binom{2m-2k}{m-k}$$

MAS E QUANTO DA O SOMATÓRIO DISSO SOBRE k ?

$$\sum_k \frac{(-1)^m}{4^m} \binom{2k}{k} \binom{2m-2k}{m-k} = \sum_k \binom{-1/2}{k} \binom{-1/2}{m-k} = \binom{-1}{m} \quad \text{CONVOLUÇÃO DE VANDERMONDE}$$

$$= \frac{(-1)^m}{m!} = \frac{(-1)(-2) \cdots (-m)}{m!} = (-1)^m$$

LEMBRANDO: $\Delta f(x) = f(x+1) - f(x)$

APLICANDO NOVAMENTE, TEMOS

$$\begin{aligned}\Delta^2 f(x) &= \Delta (f(x+1) - f(x)) \\ &= f(x+2) - f(x+1) - f(x+1) + f(x) \\ &= f(x+2) - 2f(x+1) + f(x)\end{aligned}$$

CONTINUANDO OBTENEMOS:

$$\Delta^3 f(x) = f(x+3) - 3f(x+2) + 3f(x+1) - f(x)$$

$$\Delta^4 f(x) = f(x+4) - 4f(x+3) + 6f(x+2) - 4f(x+1) + f(x)$$

O CASO GERAL FICA

$$\Delta^m f(x) = \sum_k \binom{m}{k} (-1)^{m-k} f(x+k)$$

LEMBRE TAMBÉM QUE $E f(x) = f(x+1)$, O QUE IMPLICA QUE O OPERADOR Δ É $E - I$, ONDE I É O OPERADOR IDENTIDADE $I f(x) = f(x)$

Logo,
$$\Delta^m = (E - I)^m = \sum_k \binom{m}{k} \underbrace{E^k (-I)^{m-k}}_{\substack{\rightarrow E^i (-I)^j f(x) = (-1)^j f(x+i)}}$$

FUNÇÕES GERADORAS

- GOSTARÍAMOS DE REPRESENTAR A SÉRIE INFINITA $(a_0, a_1, \dots)$ POR UMA SÉRIE DE POTÊNCIAS

$$A(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots = \sum_{k \geq 0} a_k z^k$$

- SE $A(z)$ É UMA SÉRIE DE POTÊNCIAS, USAMOS $[z^m] A(z) = a_m$
- SE $A(z)$ É A FUNC. GERADORA P/ $(a_0, a_1, \dots)$, E $B(z)$ É A FUNC. GERADORA P/ $(b_0, b_1, \dots)$, O PRODUTO $A(z)B(z)$ É

$$(a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots)(b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \dots)$$

O COEF. DE z^m EM $A(z)B(z)$ É

$$a_0 b_m + a_1 b_{m-1} + \dots + a_{m-1} b_1 + a_m b_0 = \sum_{k=0}^m a_k b_{m-k}$$

CONVOLUÇÃO DAS SEQUÊNCIAS

PORTANTO, SE QUEREMOS CALCULAR UMA SOMA DO TIPO $c_m = \sum_{k=0}^m a_k b_{m-k}$, E CONHECERMOS AS FUNÇÕES GERADORAS $A(z)$ E $B(z)$, TEMOS

$$c_m = [z^m] A(z)B(z)$$

EX: CONSIDERE AS SEQUÊNCIAS $\langle \binom{r}{0}, \binom{r}{1}, \binom{r}{2}, \dots \rangle$, $\langle \binom{s}{0}, \binom{s}{1}, \dots \rangle$
SUAS FUNÇÕES GERADORAS SÃO

$$(1+z)^r = \sum_{k=0}^r \binom{r}{k} z^k$$

PELO TEOREMA BINOMIAL

$$(1+z)^s = \sum_{k=0}^s \binom{s}{k} z^k$$

Multiplicando, obtemos OUTRA FUNÇÃO GERADORA

$$(1+z)^r (1+z)^s = (1+z)^{r+s}$$

Por um lado, o coeficiente de z^m é $\sum_{k=0}^m \binom{r}{k} \binom{s}{m-k}$

Por outro lado, $(1+z)^{r+s}$ é a função geradora de $\langle \binom{r+s}{0}, \binom{r+s}{1}, \dots \rangle$
cujo m -ésimo termo é $\binom{r+s}{m}$. Logo,

$$\sum_{k=0}^m \binom{r}{k} \binom{s}{m-k} = \binom{r+s}{m} \quad \Rightarrow \text{A convolução de VANDERMONDE!}$$

EX: $(1-z)^r$ é a func. geradora de $\langle \binom{r}{0}, -\binom{r}{1}, \binom{r}{2}, \dots \rangle$

Temos que $(1-z)^r (1+z)^r = ((1-z)(1+z))^r = (1-z^2)^r$
O coeficiente de z^m é

$$\sum_{k=0}^m \binom{r}{k} \binom{r}{m-k} (-1)^k = \binom{r}{m/2} (-1)^{m/2} \quad [m \text{ é par}]$$

NÃO VAI TER COEFICIENTE DE z^m COM m ÍMPAR!

Colocando $z^2 = x$, temos $(1-x)^r = \sum_{k \geq 0} \binom{r}{k} (-1)^k x^k = \sum_{k \geq 0} \binom{r}{k} (-1)^k z^{2k}$

PERGUNTA: Qual é a função geradora de $\langle 1, 1, 1, \dots \rangle$

$$f(z) = \sum_{k \geq 0} z^k$$

Observe que se $f(z)$ converge, temos

$$f(z) = 1 + \underbrace{z + z^2 + z^3 + \dots}$$

$$= 1 + z f(z)$$

$$\Rightarrow f(z) = \frac{1}{1-z}$$

E QUEM É A SEQUÊNCIA GERADA POR $f(z)^r = \frac{1}{(1-z)^r}$?

$$\text{EX: } f(z)^2 = 1 + 2z + 3z^2 + 4z^3 + \dots$$

$$(1+z+z^2+z^3+\dots)(1+z+z^2+z^3+\dots)$$

PROP: $\frac{1}{(1-z)^m} = \sum_{k \geq 0} \binom{m+k}{m} z^k$

PROVA: INDUÇÃO EM n .

BASE: JÁ VIMOS QUE VALE QUANDO $m=1$.

HI: SUPONHA QUE VALE P/ m' COM $1 \leq m' < m$

PASSO INDUTIVO:

PELA HI TEMOS

$$\frac{1}{(1-z)^{m-1}} = \sum_{k \geq 0} \binom{m'+k}{m'} z^k \quad \frac{1}{1-z} = \sum_{k \geq 0} z^k$$

$$\text{LOGO, } \frac{1}{(1-z)^m} = \frac{1}{(1-z)^{m-1}} \cdot \frac{1}{1-z} = \sum_{k \geq 0} a_k z^k$$

$$\text{ONDE } a_k = \sum_{r=0}^k \binom{m-1+r}{m-1} = \binom{m+r}{m} \quad \leftarrow \text{Regra da coluna!}$$

EM PARTICULAR, SE USARMOS m' E m'' NO LUGAR DE $m-1$ E 1 , TEMOS

$$\sum_{r=0}^k \binom{m'+r}{m'} \binom{m''+k-r}{m''} = a_k = \binom{m+r}{m}$$

COROLÁRIO: $\frac{z^n}{(1-z)^{n+1}} = \sum_{k \geq 0} \binom{k}{n} z^k$

Em particular, se $A(z)$ é a função geradora de $\langle a_0, a_1, \dots \rangle$,

então $\frac{A(z)}{z-1}$ é a função geradora das somas parciais:

$$\frac{A(z)}{z-1} = \sum_{k \geq 0} c_k z^k \quad \text{onde} \quad c_k = \sum_{r=0}^k a_r$$